CALCOLO E ALGEBRA LINEARE

Lezioni 17 ÷ 49 APPUNTI

Lez. 17 INTRODUZIONE AL CONCETTO DI SPAZIO VETTORIALE

IL VETTORE

E' una freccia o segmento orientato OP

$O \xrightarrow{\vec{V}} P$ vettore del piano applicato $\quad OP = \vec{V}$

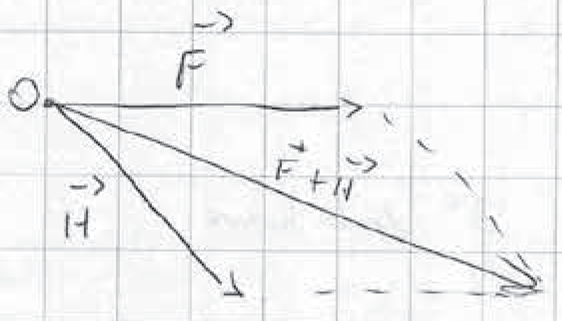
Caratterizzato da

La direzione (retta passante per O e P)

Il verso (quello che va da O a P)

Il modulo (un numero reale positivo o 0) o lunghezza ≥ 0

La somma di vettori



VETTORI OPPOSTI:

Stessa direzione (retta), stesso modulo, verso opposto.

La somma dei vettori gode della proprietà commutativa

$\vec{v}+\vec{w}=\vec{w}+\vec{v}$

La somma di vettori gode della proprietà associativa
$(\vec{v}+\vec{w})+\vec{z}=\vec{v}+(\vec{w}+\vec{z})$

(Esempio nello spazio tridimensionale)

Prodotto di un numero reale per un vettore, $a\vec{v}$:
ha la stessa direzione,
ha lunghezza $|a|\cdot|\vec{v}|$
ha verso di $\vec{v}$ se $a>0$, verso inverso se $a<0$

$a\vec{v}$ è il vettore nullo se $a=0$ oppure $\vec{v}$ è il vettore nullo
questa è la legge di annullamento del prodotto

Proprietà distributiva I^a
$a(\vec{v}+\vec{w})=a\vec{v}+a\vec{w}$

$1\vec{v}=\vec{v}$

$(a+b)\vec{v}=a\vec{v}+b\vec{v}$ II^e distributiva

$(a\cdot b)\vec{v}=a(b\vec{v})=b(a\vec{v})$

Sia $\mathbb{R}^2$ l'insieme di tutte le coppie (a,b) di numeri reali

Somma di coppie $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$

Proprietà della ~~coppia~~ somma di coppie in $\mathbb{R}^2$ (simili a quelle dei vettori del piano):

1) Commutativa $(a,b)+(c,d)=(c,d)+(a,b)$

2) Associativa $((a,b)+(c,d))+(e,f)=(a,b)+((c,d)+(e,f))$

3) Esistenza dello 0 $(0,0) \to (a,b)+(0,0)=(a,b)$

4) Esistenza dell'opposto $(a,b)+(-a,-b)=(0,0)$

Proprietà del prodotto in $\mathbb{R}^2$

1) I° distributiva $m((a,b)+(c,d))=m(a,b)+m(c,d)$

2) II° distributiva $(m+n)(a,b)=m(a,b)+n(a,b)$

3) $1(a,b)=(a,b)$

4) $(m\,n)(a,b)=m(n(a,b))$

Le proprietà valgono non solo per le coppie, ma per le terne e, in sostanza, per le n-uple.

Abbiamo alcuni insiemi con la somma e prodotto con le stesse 8 proprietà.

Questo ci introduce allo SPAZIO VETTORIALE

Domande di fine lezione

1) Operazioni fra vettori: somma e prodotto

2) Come si può rappresentare un vettore se siamo interessati a parallelismi: con una equipolenza

3) Quando si annulla il prodotto fra un numero e un vettore: se n=0 o v=nullo.

4/10

Lez. 18 SPAZI VETTORIALI, DIPENDENZA e INDIPENDENZA LINEARE

- Il concetto di spazio vettoriale
- Esempi e prime proprietà
- Sottospazi di uno spazio vettoriale
- Vettori linearmente indipendenti e dipendenti
- Esempi

elementi, coppie, terne, n-uple

Lo spazio vettoriale è un insieme con somma di vettori

LE 8 PROPRIETÀ (O ASSIOMI) DEGLI SPAZI VETTORIALI

S1 : $v + w = w + v$ commutativa

S2 : $(v+w)+z = v+(w+z)$ associativa

S3 : $v + 0 = v$ $\quad 0_V$ esistenza dello 0

S4 : $v + (-v) = 0_V$ $\quad -v$ esistenza dell'opposto

P1 : $a(v+w) = av + aw$ I^a distributiva

P2 : $(a+b)v = av + bv$ II^a distributiva

P3 : $1v = v$

P4 : $(ab)v = a(bv) = b(av)$

CALCOLO E ALGEBRA LINEARE

Lezione 18: SPAZI VETTORIALI, DIPENDENZA ed INDIPENDENZA LINEARE

UNO S.V. è un insieme con somma di vettori "S'OI" ed è DEFINITO UN PRODOTTO DI UN NUMERO PER UN VETTORE

$\mathbb{R}$ $\mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}^n$ sono spazi vettoriali

I vettori dello spazio a 2 dimensioni formano uno SV

Ma anche l'insieme: $\{(x,x) \in \mathbb{R}^2\}$

1,1   2,2   3,3   -1,-1

Qualche altra proprietà degli SV

0_v vettore nullo v $-v$ opposto $-v$ $v + (-v) = 0_v$ $v - v$

a un numero reale

$v \in V$ → coppia (x,x), tripla (x,y,z) ecc. un elemento

$a v = 0_v \implies a = \emptyset$ oppure $v = 0_v$ (v è l'elemento nullo o l'elemento nullo) legge di annullamento del prodotto

$0 v = 0_v$

$a \cdot 0_v = 0_v$

$-(a v) = (-a) v = a(-v)$

Lez. 18.2

IL SOTTOSPAZIO DI UNO SPAZIO VETTORIALE

W sottospazio di V

$W \subset V$ W è un sottoinsieme

e W è uno spazio vettoriale con la somma col il prodotto di V.

Le coppie (x, x) è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.

Ad es. in $\mathbb{R}$, le terne fatte $(x, y, x+y)$, ad es. $(3, 2, 5)$ sia W uno spazio vettoriale.

W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

Esempi di non s.v. e di non sottospazi

$$W = \{(x, x+1)\}$$

$(3, 3+1) = (3, 4)$

$(3, 4) + (5, 6) = (8, 10)$ LA SOMMA NON È BEN DEFINITA

NEMMENO IL PRODOTTO ~~LA MOLTIPLICAZIONE~~

Questo è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ che non è un sottospazio vettoriale né uno spazio vettoriale. Lez 18.3

Nell'insieme di elementi ce non c'è ne la somma ne' il prodotto.

IL CONCETTO DI COMBINAZIONE LINEARE

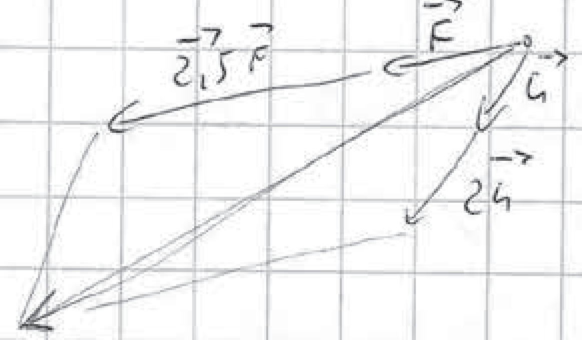
vettori o ELEMENTI

numeri reali

$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$ e' una combinazione lineare (c.l.) dei vettori $v_1 \dots v_n$ a coefficienti $a_1 \dots a_n$

$3\underbrace{(2,-2)}_{\text{elemento nello SV } \mathbb{R}^2} + (-4)(0,1) + 7(1,7)$ e' una c.l. in $\mathbb{R}^2$

Combinazione lineare di forze:



ESEMPIO PARTICOLARE di c.l. di VETTORI:

vettori di $\mathbb{R}^3$

$2(1,1,1) + 1(2,2,2) + -1(4,4,4)$

$= (0,0,0)$ $\quad |2 \ 1 \ -1|$ coefficienti

Il risultato delle c.l. sopra e' il vettore nullo di $\mathbb{R}^3$, nonostante i coefficienti non siano nulli

I VETTORI SONO DETTI "LINEARMENTE DIPENDENTI" perche' e' possibile fare una c.l. nulla con coefficienti non nulli. Lun 18.4

ALTRO ESEMPIO

$a(0,0)+b(1,1)=(0,0)$

$a+b=0$
$b=0$

I due vettori sono "LINEARMENTE INDIPENDENTI"

In pratica:

VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI

$$a_1v_1+a_2v_2+\dots a_nv_n=0$$
$$\Downarrow$$
$$a_1=a_2=\dots a_n=0$$

I VETTORI SONO LINEARMENTE DIPENDENTI SE DA UNA c.l. OTTENGO il vettore nullo 0 CON ALMENO UN COEFFICIENTE DIVERSO DA 0.

Quando m vettori sono indipendenti

$v_1,\dots v_m$ sono l.i. se e solo se:

1. $v_1 \neq 0_V$;
2. v_2 non è un multiplo di v_1;
3. v_3 non è c.l. di v_1 e v_2;

...

m v_m non è c.l. dei precedenti $v_1,\dots,v_{m-1}$

 Lez 18.5

VERSORI FONDAMENTALI di $\mathbb{R}^3$

$$e_1 = (1,0,0)$$
$$e_2 = (0,1,0)$$
$$e_3 = (0,0,1) \quad \text{sono l.i. in } \mathbb{R}^3.$$

VERSORI FONDAMENTALI DI $\mathbb{R}^n$

$$e_1 = (1,0,0,\dots 0)$$
$$e_2 = (0,1,0,\dots 0)$$
$$\dots$$
$$e_n = (0,0,0,\dots,1)$$

PROPRIETA' DEI VETTORI l.i.

$$v = a_1 v_1 + \quad + a_n v_n \quad \text{l.i.}$$
$$v = b_1 v_1 + \quad + b_n v_n$$

$$\boxed{a_1 = b_1}, \dots, a_n = b_n$$

componenti di vettori

MODO UNIVOCO, VETTORI c.l. sono univoche

Domande

1. Quali operazioni sono definite in uno s.v.: somma e prodotto
2. Quali sono i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}$
3. Qual è un esempio di sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ che non è uno spazio vettoriale
4. Si possono trovare $n+1$ vettori l.i. in $\mathbb{R}^n$
5. Come si può verificare se due vettori sono l.i.

Lez 18.6

SPAZI VETTORIALI

8 PROPRIETA' (O ASSIOMI) DEGLI SPAZI VETTORIALI

S1: $v+w = w+v$ (COMMUTATIVA)

S2: $(v+w)+z = v+(w+z)$ (ASSOCIATIVA)

S3: Esiste l'elemento nullo, 0_V tale che $v+0_V=v$ ($\exists$ dello $\emptyset$)

S4: $\forall$ elemento v $\exists$ l'elemento opposto tale che $v+(-v)=0_V$

sia a reale, v e w vettori in V

P1: $a(v+w) = av+aw$ (I° DISTRIBUTIVA)

P2: $(a+b)v = av+bv$ (II°)

P3: $1v = v$

P4: $(ab)v = a(bv) = b(av)$

W SOTTOSPAZIO DI V

$W \subset V$ è un suo sottoinsieme

e W è anch'esso uno spazio vettoriale se ha la somma ed il prodotto in V

W, CHE HA ELEMENTI DI V, TUTTI O IN PARTE, SE VERIFICA LE 8 PROPRIETA', ALLORA È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE DELLO SPAZIO VETTORIALE

LA COMBINAZIONE LINEARE

essa è definita così, con $a \in R$ $v \in V$

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

c.l. di n vettori

(SOMMA DI N elementi; un elemento è un prodotto di un numero per un vettore

Esempio

$3(2,-2) + (-4)(0,1) + 7(1,2)$ è una c.l. in $\mathbb{R}^2$

Lez 18.3

LEZ. 18 BASI e SISTEMI DI GENERATORI e DIMENSIONE DI UNO SPAZIO VETTORIALE

SOMMARIO : GENERATORI, BASI e DIMENSIONE DI UNO SPAZIO VETTORIALE

- Generatori di S.V.
- Basi di uno S.V.
- Come si trova una base
- La dimensione di uno S.V.
- Il calcolo della dimensione

I GENERATORI DI UNO SPAZIO VETTORIALE

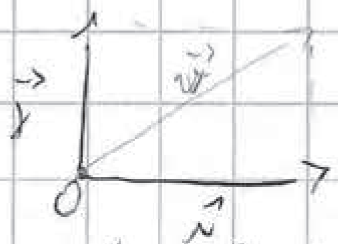
L'insieme di vettori $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ generano V (lo S.V.)

per ogni v in V si ha

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n ,$$

cioè v può essere scritto come combinazione lineare di $v_1, v_2, \dots, v_n$ a coefficienti reali

$\vec{i}$ e $\vec{j}$ generano tutti i vettori del piano applicati in O



$\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$

Lez 18.1

Vettori fondamentali di $\mathbb{R}^n$ (Generano $\mathbb{R}^n$)

$$\left.\begin{array}{l} e_1 = (1,0,0,\dots,0) \\ e_2 = (0,1,0,\dots,0) \\ \dots \\ e_n = (0,0,0,\dots,1) \end{array}\right\}$$

ogni elemento di $\mathbb{R}^n$ si può scrivere come c.l. di quei vettori

generano $\mathbb{R}^n$

$n=3$ $(1,0,0)$ $(0,1,0)$ $(0,0,1)$

$\mathbb{R}^3$ $(a,b,c) = a(1,0,0) + (0,1,0) + c(0,0,1)$

Altri generatori

$\mathbb{R}^2$ $\boxed{(1,1) \quad (1,0)}$

$a(1,1) + b(1,0) = (\alpha,\beta)$

$a+b=\alpha$
$a=\beta$

$b=\alpha-\beta$

$\Rightarrow a=5$ $(3,5)$
$b=-2$
genera

$v_1 = (1,1) \quad v_2 = (1,0)$

$v_3 = (0,1)$

sono generatori di $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2$ perché

$a(1,1) + b(1,0) + c(0,1) = (\alpha, \beta)$

$a + b = \alpha$
$a + c = \beta$

CI SONO INFINITE SOLUZIONI.

$a = 0$
$b = \alpha$
$c = \beta$

ABBIAMO VISTO CHE I GENERATORI POSSONO ESSERE MOLTI, ALLORA CERCHIAMONE DI ALCUNI PIÙ PARTICOLARI, GENERANO SPRECHI:

BASE DI UNO SPAZIO VETTORIALE

Base di uno S.V.

pluralità $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ base di V

$\overset{\shortparallel}{V}$

generatori linearmente indipendenti.
ovvero generano V e sono l.i.

Lez 19.3

Dati questi vettori base

$v = a_1 v_1 + \dots a_n v_n$

ma siccome sono linearmente indipendenti, quindi $a_1, \dots, a_n$ sono univoci, dipendono solo da v.

Una $\boxed{\text{base}}$ è un insieme di generatori tali che ogni vettore v dello spazio vettoriale si scrive come combinazione lineare di questi vettori in modo unico.

Ad. esempio

Base di n-uple

$e_1 = (1, 0, \dots, 0)$
$e_2 = (0, 1, \dots, 0)$
$e_n = (0, 0, \dots, 1)$

base di $\mathbb{R}^n$

$e_1 \dots e_n$ non sono solo generatori ma sono anche una base perché sono linearmente indipendenti. Un elemento di $\mathbb{R}^n$ si può scrivere univocamente come c. l. di $e_1 \dots e_n$, di questi vettori.

Naturalmente ogni spazi vettoriali ci sono altre basi, diverse da queste

Lez 19.4

Ad es. $\mathbb{R}^2$, ci sono basi $\neq$ da quella formata da $(1,0)$ e $(0,1)$? SI,

$$\underbrace{(1,1) \quad (1,0)}_{\text{base}}$$

generano $\mathbb{R}^2$ e sono l.i.

$v_1 = (1,1)$ $v_2 = (1,0)$
$v_3 = (0,1)$ } sono generatori dello s.v. $\mathbb{R}^2$, ma NON SONO UNA BASE.

Perché non sono l. ind.
NON C'È UNICITÀ, si è visto prima.

COMPONENTI

se v si scrive come c.l. dei vettori $v_1 \dots v_n$ e questi sono una base

$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$ e $v_1 \dots v_n$ è una base

i numeri $a_1, a_2, \dots a_n$ (nell'ordine) sono le componenti di v rispetto alla base $(v_1, v_2, \dots, v_n)$

Una base, per essere tale, deve essere messa in ordine. Cioè i vettori di una base non sono un insieme di vettori che posso considerare nell'ordine che voglio, sono dei vettori messi in un certo ordine. Se cambio l'ordine continuo ad avere una base, sono generatori e sono linearmente indipendenti però se cambio

l'ordine è un'altra base. Per convenzione.
Sennò non sono ben definite le componenti.
Le componenti non si potrebbe dire che cosa sono.

Riprendendo ai due vettori

$v_1 = (1,1)$ e $v_2 = (1,0)$ questi due vettori formano una base, ogni vettore α e β ha componenti rispetto a questa base univocamente determinate. Avevamo visto anche il calcolo, ovvero che $a = \beta$ e $b = \alpha - \beta$.

Se cambio l'ordine continuo ad avere una base però è un'altra base e cambiano le componenti, in questo caso si scambiano.
Quindi L'ORDINE HA UNA SUA IMPORTANZA.

LE PROPRIETÀ RELATIVE ALLE BASI DEGLI SPAZI VETTORIALI, come sono fatte quanti elementi hanno

1) IL TEOREMA DI STEINITZ

$x_1, x_2, \dots, x_n$ generatori

$y_1, y_2, \dots, y_m$ linearmente indipendenti

allora: $m \leq n$

Lez 19.6

Se vogliamo contare il numero di elementi di una base di uno spazio vettoriale abbiamo bisogno di questa proprietà.

Questo teorema afferma che se ho un sistema di generatori di uno spazio vettoriale e poi ho un altro sistema di vettori linearmente indipendenti nello spazio vettoriale con i primi vettori in numero di n e i secondi in numero di m allora m il numero dei vettori linearmente indipendenti non può mai superare n il numero dei generatori.

Cioè un insieme di vettori indipendenti è sempre in numero inferiore o al massimo uguale al numero di vettori di un qualunque altro sistema che sia un sistema di generatori.

Insomma i generatori sono di più dei vettori linearmente indipendenti.

Questo ci permette di trovare una proprietà fondamentale delle basi degli spazi vettoriali:

COROLLARIO DEL TEOREMA DI STEINITZ:
Tutte le basi di uno spazio vettoriale hanno lo stesso numero di elementi.

Lez 19.7

Se ho $v_1, \dots, v_m$ base

e $w_1, \dots, w_r$ un'altra base,

perché r e m devono essere uguali?

Il teorema di Steinitz afferma che

m

↳ il numero dei vettori $v_1 \dots v_m$, un insieme di vettori linearmente indipendenti

r

↳ è il numero di vettori di un'altra base, cioè è il numero di vettori di un insieme di generatori perché le basi sono anche generatori e allora

$m \leq r$

Capovolgendo il ragionamento posso dire che per la stessa ragione $r \leq m$, ma allora $r = m$

Quindi tutte le basi di uno spazio vettoriale hanno lo stesso numero di elementi

Questa proprietà fondamentale degli spazi vettoriali ci porta alla definizione di dimensione di uno spazio vettoriale

Siccome in un uno spazio vettoriale tutte le basi hanno lo stesso numero di elementi allora questo numero rappresenta la dimensione di uno spazio vettoriale.

Lez 19.8

DIMENSIONE di uno spazio vettoriale è il numero di elementi di una qualsiasi base

$(v_1, v_2, \dots v_n)$ base qualsiasi di V

$$n = \dim V$$

Tutte le basi di V hanno n elementi

Cioè prendendo a caso una base in uno spazio vettoriale, di questa conto gli elementi allora so che lo spazio vettoriale ha quella dimensione.

Ad es. la dimensione di $\mathbb{R}^2$ è 2, perché c'è una base formata con due elementi tutte le basi sono B

$\dim \mathbb{R}^2 = 2$

Sappiamo che $\mathbb{R}^3$ ha una base formata da 3 vettori allora la sua dimensione è 3

$\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale formato con n versori fondamentali, allora la sua dimensione è n.

Queste osservazioni ci possono dare una risposta alla ricerca della dimensione. In $\mathbb{R}^2$ se ho 3 vettori, essi possono essere generatori, ma non una base perché $\mathbb{R}^2$ ha dimensione 2   Lez. 15.8

Le conseguenze del teorema di Steinitz:

dim $V = n$ implica
1) n vettori l.i. formano una base
2) n generatori formano una base
di uno spazio vettoriale di dimensione n

I SOTTOSPAZI

Se V ammette un sottospazio W allora W avrà delle basi, una dimensione ecc.

Dimensione di sottospazi

W sottospazio di V: $\dim W \leq \dim V$

Se $\dim V = n$, allora $0 \leq \dim W \leq n$

$\dim W = 0$: $W = \{ 0_V \}$ il vettore nullo $\quad \dim W = n$: $W = V$

LA RICERCA DI BASI DI UNO SPAZIO VETTORIALE

Uno spazio vettoriale V e un sottospazio vettoriale $W = \mathcal{L}(v_1, \ldots, v_m)$ spazio v. che ha generatori
nullo in V.

Lez 13.10

Come trovare una base di U? Con il metodo degli scarti.

METODO DEGLI SCARTI

Da un sistema di generatori

$v_1, v_2, \dots, v_m$

si scartano i vettori nulli.

ogni vettore v che è combinazione lineare dei precedenti, resta una base.

Ovvero, tolti quelli nulli, controllo che il secondo non sia multiplo del primo, il terzo non sia combinazione lineare dei precedenti.

Se ciò avviene prendo il primo vettore che è c.l. dei precedenti e lo elimino e riparto con lo stesso ragionamento, ovvero eliminando il primo vettore che è combinazione lineare dei precedenti. Eliminati tutti i vettori che sono c.l. dei precedenti alla fine ottengo una base dello spazio vettoriale.

Ad es. una base di $\mathbb{R}^2$

generatori di $\mathbb{R}^2$

$$\mathbb{R}^2 = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3) \qquad \boxed{\begin{array}{l} v_1 = (1,1) \\ v_2 = (1,0) \\ v_3 = (0,1) \end{array}}$$

Voglio trovare una base usando il metodo degli scarti.
Devo eliminare i vettori nulli: non ce ne sono.

Lez 13 .II

v_1 è non nullo e fa parte della base.

Il vettore v_2 è una c.l. di v_1, un multiplo del primo, in pratica? No, non lo è allora lo prendo.

Il terzo vettore è una c.l. dei precedenti? Sì, di sicuro, allora la base è formata da v_1 e v_2.

Facciamo un altro ragionamento:

v_3 v_1 e v_2 sono sempre generatori dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$. Voglio trovare una base di $\mathbb{R}^2$.

In questo caso v_3 lo prendo perché è il primo vettore. Il vettore v_1 lo prendo perché non è multiplo di v_3. Allora v_2 lo scarto perché ho trovato due vettori indipendenti due generatori.

$$\left(v_2 = a v_3 + b v_1 \right)$$

questo calcolo è inutile perché dal teorema di STEINITZ, sapevo che dim $\mathbb{R}^2 = 2$, e che ho già trovato una base.

Un altro modo per calcolare la dimensione di uno spazio vettoriale 34.46

Dipende dal fatto che lo sv non sia assegnato con dei generatori

Supponiamo che

V = spazio assegnato da $v_1, \dots v_m$ generatori, ma non ci interessa trovare una base estratta da questi generatori

ci interessa sapere se w_1 w_2 w_2 sono dei vettori di V l.i, cosa possibile.

Allora voglio trovare una base dello spazio vettoriale V formata dai vettori $w_1, w_2, \dots, w_2$ ed eventualmente da altri vettori.

Stavolta, anziché scartare, vorrei aggiungere qualcosa. Questo si definisce come

Completamento dei vettori linearmente indipendenti

$w_1, w_2, \dots, w_2$ l.i, vogliamo completarli a una base a una base

$v_1, v_2, \dots, v_m$ generatori di V

$w_1, w_2, \dots, w_2, \quad v_1, v_2, \dots v_m$ ancora generatori di V

Se ne estrae una base con gli scarti.

I vettori che andremo a scartare sono tra i vettori v_i.
I vettori che rimangono saranno una base. Con B.

Come si fa nella pratica, con un esempio.

Se in $\mathbb{R}^3$ sono interessato ad una base che contenga il vettore $(1,1,1)$.

So' che una base della su $\mathbb{R}^3$

quindi un sistema di generatori e' formato dai vettori

$$\underset{v_1}{(1,1,1)} \quad \underset{v_2}{(1,0,0)} \quad \underset{v_3}{(0,1,0)} \quad \underset{v_4}{(0,0,1)}$$

a cui quindi applico il metodo complessivo degli scarti:
v_1 non lo scarto perche' non e' 0; v_2 non lo scarto perche' palesemente non e' un multiplo di v_1; c'e' il dubbio se devo scartare v_3:

$$\underbrace{(0,1,0) = a(1,1,1) + b(1,0,0)}_{\text{se } v_3 \text{ e' c.l. di } v_1 \text{ e } v_2 \text{ lo scarto}}$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= a+b \\ 1 &= a \\ 0 &= a \end{aligned}\right\}$$

sono equazioni incompatibili, quindi v_3 non e' c.l. di v_1 e v_2, allora lo prendo e ci possiamo fermare perche' $\mathbb{R}^3$ ha dimensione 3 e quelli vettori li sicuro non formano una base dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$

La base che cercavamo contenente il vettore $(1,1,1)$ e' formata da
$(1,1,1)$ $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$.
Questo e' un modo abbastanza semplice per completare questo vettore indipendente a una base di $\mathbb{R}^3$. Lez. 13 14

30

Riassumendo quanto visto in questa lezione:

BASE = generatori linearmente indipendenti

DIMENSIONE = numero elementi di una e quindi ogni base

Domande:

1. Esiste un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$ formato con $n+2$ vettori? SI
2. Ci può essere una base di $\mathbb{R}^n$ formata da $n+1$ elementi? NO!!!
3. Quanti vettori linearmente indipendenti ci sono al massimo in $\mathbb{R}^n$? n
4. Qual è la dimensione di $\mathbb{R}^n$? n

APPENDICE

SISTEMA DI GENERATORI

UN SISTEMA DI GENERATORI DI UNO SPAZIO VETTORIALE (O DI UN SOTTOSPAZIO) È UN INSIEME DI VETTORI CHE PERMETTE DI RICOSTRUIRE MEDIANTE COMBINAZIONI LINEARI TUTTI I VETTORI DELLO SPAZIO

Lez. 20 LE MATRICI Iª PARTE

RANGO e RIDUZIONE.

- Il concetto di matrice
- Il rango di una matrice
- Come si riduce una matrice e se ne calcola il rango
- Come si usa una matrice per trovare le basi dei sottospazi vettoriali (è una applicazione)

Esempio GAS

A	30% gasolio	10%	10%
B	20	20	5%
C	15	15	10

una "tabella"
LA MATRICE

$$A = \begin{bmatrix} 30 & 10 & 10 \\ 20 & 20 & 5 \\ 15 & 15 & 10 \end{bmatrix}$$ Righe = GAS

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

della notazione con righe e colonne fra parentesi

UNA MATRICE È
UNA TABELLA

MATRICE con $\boxed{m}$ righe ed $\boxed{n}$ colonne

$$\begin{array}{cc} & \text{Riga} \quad \text{colonna} \\ A = & \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

Ogni riga ha n elem
Ogni colonna ha m elem

$\boxed{\text{elemento } a_{\text{Riga colonna}}}$

un elemento si trova all'incrocio fra una riga e una colonna a_{ij} (colonna, riga)

es.: $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \boxed{0} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow 3 = a_{12}$

$\boxed{0} = a_{33}$

SPAZIO DELLE RIGHE, È UNO SPAZIO VETT.

Ogni riga di n elementi è una n-upla
Ovvero è un elemento dello di $\mathbb{R}^n$.

Le righe sono una n-upla e
le righe sono VETTORI di $\mathbb{R}^n$ e
generano un sottospazio di $\mathbb{R}^n$

$L(R_1, \dots, R_m) =$ Spazio vettoriale contenuto in $\mathbb{R}^n$ e generato da

è un sottospazio

$R_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n})$

$\vdots$

$R_m = (a_{m1}, \dots, a_{mn})$

Lez 20.2

Se prendiamo la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

lo spazio delle righe è lo spazio generato dalle righe $\left.\begin{matrix}(1,1,1) \\ (2,1,0)\end{matrix}\right\}$ dentro $\mathbb{R}^3$ ➝ VETTORI in $\mathbb{R}^3$

sottospazio vettoriale generato da due elementi.

Analogamente si possono considerare le colonne

SPAZIO DELLE COLONNE. È UNO SPAZIO VETTORIALE

$L(C_1, \dots, C_n)$ = Spazio vettoriale contenuto in $\mathbb{R}^m$ e generato da

$C_1 = (a_{11}, \dots, a_{m1})$

$\vdots$

$C_n = (a_{1n}, \dots, a_{mn})$

$\mathcal{R}$ e $\mathcal{C}$, lo spazio delle righe e lo spazio delle colonne sono spazi completamente diversi. Generati da vettori diversi che possono stare anche in ambienti diversi.

Lo spazio delle colonne generato dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ è generato dai vettori $(1,2)(1,1)(1,0)$, che sono 3 vettori di $\mathbb{R}^2$, mentre lo spazio delle righe era generato da 2 vettori di $\mathbb{R}^3$.

lez 20.3

Può capitare casualmente che una matrice abbia lo spazio delle righe e lo spazio delle colonne contenuti nello stesso ambiente.
Questi sono casi molto particolari. Ad es.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

una matrice con tre righe e tre colonne. Essa ha lo spazio delle righe generato da elementi di $\mathbb{R}^3$ e lo spazio delle colonne generato da elementi di $\mathbb{R}^3$. Quindi lo spazio delle righe e lo spazio delle colonne sono due sottospazi di $\mathbb{R}^3$, completamente diversi.

Una matrice con il numero di righe equivalente al numero di colonne si dice MATRICE QUADRATA

IL RANGO DI UNA MATRICE

Lo spazio delle righe è un sottospazio di $\mathbb{R}^m$ e quello delle colonne è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ e questi due hanno stessa dimensione

$$\dim \underbrace{L(R_1, \dots, R_m)}_{\text{SOTTOSPAZIO delle righe, SOTTOSPAZIO GENERATO dalle righe}}$$

$$\dim L(C_1, \dots, C_n)$$

$$=$$

$$\text{Rango } A = \overset{\text{ro}}{\rho}(A)$$

Lez 20.4

CALCOLO DEL RANGO DI UNA MATRICE

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$ 2 Righe e 3 colonne

dimensione del sottospazio generato dalle righe è il numero di vettori

Per lo spazio delle righe consideriamo i vettori $(1,2,1)$ e $(0,1,3)$ due vettori di $\mathbb{R}^3$

È facilissimo verificare che i due vettori non sono l'uno multiplo dell'altro, il primo è non nullo, il secondo non è multiplo del primo e allora la dimensione dello spazio vettoriale delle righe vale naturalmente 2 che coincide con il rango della matrice A

$$2 = \rho(A)$$

Per lo spazio delle colonne consideriamo i vettori $(1,0)$ $(2,1)$ e $(1,3)$ che è contenuto in $\mathbb{R}^2 \neq \mathbb{R}^3$ e si scrive

è generato dai vettori

il 3° è inutile per formare una base

$$\mathcal{L}(\underbrace{(1,0)(2,1)}_{\text{base}}(1,3)) \subseteq \mathbb{R}^2$$

e la sua dimensione è 2 perché in $\mathbb{R}^2$ per formare una base più di due vettori non ci sono

Data una matrice tipo

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$ 3 Righe e 4 colonne.

Calcolarne il rango della matrice col metodo visto risulta complesso. Occorre un metodo

Lez 20.5

più semplice. Da ricordarsi che il rango di una matrice è definito come la dimensione dello spazio delle righe e quello delle colonne

DETERMINARE IL RANGO DI UNA MATRICE QUALSIASI IN MODO SEMPLICE

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

questa matrice è particolarmente facile al fine di calcolare la dim dello spazio delle R e delle C perché:

la 1ª riga è non nulla

la 2ª non è multiplo della 1ª

la 3ª riga non è c.l delle 2, perché occorre che a 0 5 no $\emptyset$, ma allora il 5?

$$R_3 = a R_1 + 5 R_2$$

Allora la presenza di questi $\emptyset$ facilita il calcolo del rango.

Possiamo facilmente dire che questa matrice ha 3 RIGHE LINEARMENTE INDIPENDENTI e siccome 3 vettori l.i che generano uno spazio vettoriale allora sono una base di questo spazio vettoriale.

$$\text{Allora } \rho(B) = 3$$

Inutile fare il calcolo sulle colonne, che peraltro sarebbe più difficile perché gli $\emptyset$ non sono

l.i W.C

18'31" Mezz: in buona posizione

MATRICI RIDOTTE PER RIGHE

In ogni riga c'è un elemento che chiamiamo speciale

$$A = \begin{pmatrix} \blacklozenge & \square & \blacklozenge & \blacklozenge & \blacklozenge \\ \square & 0 & \blacklozenge & \blacklozenge & \blacklozenge \\ 0 & 0 & \square & \blacklozenge & \blacklozenge \\ 0 & 0 & 0 & \blacklozenge & \square \\ 0 & 0 & 0 & \blacklozenge & 0 \end{pmatrix}$$

Questa è una matrice ridotta per righe

→ ultima riga potrebbe essere o no un elemento speciale

$\square$ = elemento speciale $\neq 0$ e sotto solo 0

$\blacklozenge$ = elemento qualsiasi

0 = zero

SE UNA MATRICE È RIDOTTA PER RIGHE IL RANGO DELLA MATRICE È IL NUMERO DI RIGHE DELLA MATRICE NON NULLE.

RANGO DELLA MATRICE RIDOTTA PER RIGHE IL NUMERO DELLE RIGHE NON NULLE

Nelle matrici possono anche esserci righe nulle formate da tutti 0.

20.8

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La riga nulla non ha influenza sul rango.
Le righe nulle non hanno effetto sull'essere ridotta. Posso aggiungere o togliere delle righe nulle e il rango resta uguale al numero delle righe non nulle.

Questo discorso, per ragioni di simmetria, può essere fatto anche sulle colonne.

Possiamo ad es. prendere una matrice che sia RIDOTTA PER COLONNE

un elemento non nullo in cui a dx ci sono tutti elementi nulli

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Questa è una MATRICE RIDOTTA PER COLONNE e il suo rango è il numero di colonne

E NON CAMBIA SE AGGIUNGO QUALUNQUE UNA COLONNA DI $\emptyset$.

LA RIDUZIONE DI UNA MATRICE PUÒ ESSERE FATTA PER RIGHE O PER COLONNE, A SECONDA DI QUELLO CHE FA COMODO

Lez. 20.8

È INDIFFERENTE CALCOLARE IL RANGO DI UNA MATRICE SIA ESSA RIDOTTA PER RIGHE O PER COLONNE.

Però con questo non abbiamo risolto il problema del calcolo del rango di una matrice poiché le matrici ridotte sono molto poche.

Ci capiteranno matrici non ridotte né per righe, né per colonne.
Ad es. una matrice non ridotta né per righe né per colonne è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Devo trovare una qualche operazione che permetta di calcolare il rango di una matrice ridotta che abbia lo stesso rango di quella non ridotta.

Dobbiamo introdurre una serie di operazioni che ci consentono di passare da una qualsiasi matrice A ad una matrice A' che sia invece ridotta, per righe o per colonne, facendo però in modo che il rango della matrice di partenza e quello di arrivo siano uguali. Ovvero:

$$A \longrightarrow A'$$

$$\rho(A) = \rho(A')$$

Lez. 20 S

TRASFORMAZIONE ELEMENTARE SULLE RIGHE

E1: $R_i \to a R_i$ con $a \neq 0$ è permesso prendere una riga e moltiplicare tutti i suoi elementi per un numero $a \neq 0$

E2: $R_i \leftrightarrow R_j$ con $i \neq j$ è permesso scambiare una riga R_i con una riga R_j

E3 $R_i \leftrightarrow R_i + a R_j$ con $a \neq 0$, $i \neq j$ ovvero sostituire una riga R_i con una riga ottenuta dalla riga R_i sommata ad un multiplo di un'altra riga R_j

Queste operazioni non cambiano lo spazio delle righe e quindi il rango $\rho(A)$.

1. Pivot o elemento speciale

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \boxed{1} \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1} \begin{array}{c} * \\ ** \\ *** \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3 + R_1 \\ \text{della matrice iniziale}}]{****} \begin{array}{c} *** \\ *** \\ **** \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \boxed{1} \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

* la 1ª riga non la tocchiamo, ma sotto quelle vogliamo far venire degli $\varnothing$. ** Quindi al posto della 2ª riga scriveremo la Riga 2 − Riga 1.

*** La Riga 3 per ora la scambiamo inalterata

LA NS. MATRICE è migliorata!

**** Andando avanti, la successiva trasformazione comporta che le Riga 1 e 2 le lascio invariate

Lez. 20.10

***** Nella Riga 3 vorrei uno $\emptyset$ come ~~primo~~ termine.
Allora scrivo la Riga 3 + Riga 2 nella matrice iniziale
DA NOTARE CHE L'ELEMENTO SPECIALE $\boxed{1}$ LO UTILIZZO IN TUTTE LE OPERAZIONI

Quindi ho

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \boxed{1} \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{R_3 - 4R_2} \longrightarrow * \begin{pmatrix} 1 & 1 & \boxed{1} \\ \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

ho due elementi speciali, sotto ho solo $\emptyset$.
ed anche quest è un elemento speciale perché sotto ho solo $\emptyset$.

e varie possibilità per procedere. Volevo per venire nella seconda riga un elemento speciale.
Potrei decidere che l'elemento speciale è $\boxed{1}$
* Al posto della terza riga potrei scrivere la Riga 3 − 4 • Riga 2

Quindi il rango di questa matrice RIDOTTA PER RIGHE, è 3.
Allora è 3 anche il rango della matrice di partenza.

MA ATTENZIONE, perché potevo fare più in fretta: bastava scambiare le righe 2 e 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \boxed{1} \\ 4 & \boxed{2} & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{1}$ → elemento speciale, con sotto $\emptyset$

QUINDI NELLA RIDUZIONE PER RIGHE,
SI SCEGLIE UN ELEMENTO SPECIALE
NELLA PRIMA DELLE RIGHE NON NULLE.
E SI FANNO VENIRE Ø AL DISOTTO.
POI FACCIO DIVENTARE UNO Ø DUE RIGHE
SOTTO, TRE RIGHE SOTTO FINO AD
ESAURIRLE, SOTTO VERRANNO
TUTTI Ø. POI COMINCIO A
LAVORARE SULLA SECONDA RIGA,
LA PRIMA NON LA TOCCO PIÙ
LA IGNORO, LAVORO SULLA SECONDA
E FACCIO LA STESSA OPERAZIONE

SE CI SONO DELLE RIGHE NULLE,
LE IGNORO, LÌ NON HO BISOGNO
DI METTERE ELEMENTI SPECIALI.

IN CONCLUSIONE PER TROVARE IL
RANGO DI UNA MATRICE LA
SI RIDUCE PER RIGHE OPPURE
LA SI RIDUCE PER COLONNE
Qualche volta è più facile. Ad es. una matrice con
50 righe e 3 colonne: conviene fare una riduzione per colonne

La più usata è la trasformazione E 3.

Lez 20.12

TUTTO QUESTO CI SERVE ANCHE PER IL CALCOLO DELLA DIMENSIONE DI UNO SPAZIO VETTORIALE GENERATO DA CERTI VETTORI.

FORMALIZZAZIONE:

$$v_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n})$$
$$\dots\dots$$
$$v_m = (a_{m1}, \dots, a_{mn})$$
$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11}, \dots, a_{1n} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}, \dots, a_{mn} \end{bmatrix}$$

SE CALCOLO IL RANGO DELLA MATRICE A HO CALCOLATO ANCHE LA DIMENSIONE DELLO SPAZIO DELLE RIGHE E LO SPAZIO DELLE RIGHE È LO SPAZIO VETTORIALE CHE HA QUESTE RIGHE COME VETTORI, DUNQUE HO CALCOLATO LA DIMENSIONE DELLO SPAZIO VETTORIALE CHE HA PER GENERATORI QUEI VETTORI.

QUINDI È UNA QUESTIONE DI MATRICI.

AD. ES. SUPPONIAMO DI ESSERE NELLO SPAZIO VETTORIALE $\mathbb{R}^4$ E DI VOLER CALCOLARE LA DIMENSIONE DEL

SOTTOSPAZIO W GENERATO DAI SEGUENTI VETTORI

$\mathbb{R}^4$ W

$(1, 1, 2, 1)$

$(2\ 1\ 0\ 3)$

$(4\ 4\ 1\ 0)$ e si voglia calcolare la dimensione

Faccio diventare una matrice i vettori e riduco per righe la matrice.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 7 & 7 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad R_3 = 2 \cdot R_3 - R_1$$

la 1ª riga invariata la 2ª pure perché c'è lo 0 sotto il 2, la 3ª riga la moltiplichiamo per 2 e sottraiamo la 1ª riga.

elementi speciali

$$\begin{array}{l} \text{INV.} \\ \text{INV.} \rightarrow \\ R_3 = R_3 - 7R_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & \boxed{1} & 0 & 3 \\ -7 & 0 & 0 & -22 \end{pmatrix}$$

uno 0 sotto quello 1

3 elem speciali. Rango = 3 $\Rightarrow$ W ha dim 3

20.14

Rango della matrice 3: $\rho = 3$.

Quindi 3 vettori le righe sono linearmente indipendenti e sono esattamente una base dello spazio vettoriale delle righe, il rango è 3, lo spazio vettoriale W ha dimensione 3.

SI NOTI CHE CON TUTTE QUESTE OPERAZIONI LO SPAZIO DELLE RIGHE W NON È CAMBIATO, SONO CAMBIATI I GENERATORI MA LE 3 RIGHE FINALI SONO UNA BASE DELLO SPAZIO W SOTTOSPAZIO DI $\mathbb{R}^4$ FORMATA CON 3 VETTORI.

CONCLUSIONI:

Matrici con m righe ed n colonne

Rango = dim (spazio delle righe) = dim (spazio delle colonne)

Matrici ridotte per righe

Rango = numero delle righe non nulle

Dimensione di un sottospazio

$\Downarrow$

Rango di una matrice

22/5

Domande:

1. Può avere una matrice con 3 righe e quattro colonne avere rango 4? NO, max 3

2. Se ad una matrice si aggiunge una riga il rango aumenta sempre? NO, Dipende dalla riga

3. Se una matrice ridotta per righe ha 10 righe non nulle, quanto vale il suo rango? 10

Lez. 21 MATRICI II° : LE OPERAZIONI

- LA SOMMA di due matrici
- IL PRODOTTO di una matrice per un numero
- IL PRODOTTO fra matrici e proprietà

SOMMA DI DUE MATRICI

CON STESSO NUMERO DI RIGHE e
STESSO NUMERO DI COLONNE

$$\begin{bmatrix} a_{11}, \dots, a_{1n} \\ a_{m1}, \dots, a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}, \dots, b_{1n} \\ b_{m1}, \dots, b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11}, \dots, a_{1n}+b_{1n} \\ a_{m1}+b_{m1}, \dots, a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Cioè è la somma degli elementi con lo stesso indice.

PRODOTTO DI UNA MATRICE per un NUMERO REALE

$$aA = a \begin{bmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ a_{m1}, \dots, a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot a_{11}, \dots a \cdot a_{1n} \\ a \cdot a_{m1}, \dots, a \cdot a_{mn} \end{bmatrix}$$

cioè il numero reale a viene moltiplicato per tutti gli elementi della matrice A.

MATRICI CON RIGHE O COLONNE DIVERSE NON POSSONO ESSERE SOMMATE.

PROPRIETÀ DELLA SOMMA DI MATRICI

$A + B = B + A$ Commutativa

$A + (B + C) = (A + B) + C$ Associativa

$A + 0 = 0 + A = A$ Esiste la matrice nulla

$A + (-A) = A - A = 0$ Esiste la matrice opposta

PROPRIETÀ DEL PRODOTTO DI UN NUMERO PER UNA MATRICE

$a(A + B) = aA + aB$ Distr. [illegible]

$(a + b)A = aA + bA$ Distributiva

$1A = A$

$(ab)A = a(bA) = b(aA)$

IN PRATICA LE STESSE PROPRIETÀ DI ALTRI ESEMPI, ad esempio le n-uple di $\mathbb{R}^n$.

$\mathbb{R}^{m,n}$ indica una matrice di numeri reali con m righe e n colonne.

In $\mathbb{R}^{m,n}$ sono definite le operazioni:

$$A + B$$
$$a \cdot A$$

Quindi abbiamo un nuovo esempio di SPAZIO VETTORIALE
Condizione è che m e n siano costanti
(uguali o diversi (ad loro, diversi con m e n qualunque, ≥ 0)

PRODOTTO FRA MATRICI

$$C = AB = \underbrace{\begin{bmatrix} a & b & c \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}}_{m \times p} \underbrace{\begin{bmatrix} \square & \square & d \\ \square & \square & e \\ \square & \square & f \end{bmatrix}}_{p \times n} = \begin{bmatrix} & & \square \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$c_{13} = a \cdot d + b \cdot e + c \cdot f$$

LA MATRICE A e B SONO LEGATE NEL PRODOTTO FRA MATRICI, UNA AD AVERE

IL NUMERO DI COLONNE EQUIVALENTE AL NUMERO DI RIGHE DELL'ALTRA,

OVVERO $A \cdot B$ => numero colonne A = numero righe B,

Condizione: $\boxed{n. \text{ Colonne } A = n \text{ Righe } B}$

Qualche esempio:

3 colonne

2 righe

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$2 \times \boxed{3}$ (righe x colonne) n. colonne di $A \neq$ n. colonne di B $\boxed{2} \times 3$

$A \times B$ non si può fare

Se avessimo

2 colonne

2 righe

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$2 \times \boxed{2}$ (Righe x Col) → $\boxed{2} \times 3$ colon

Ok, Si può fare $A \cdot B$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} \boxed{10} & 10 & 8 \\ 18 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

Tutte le righe di A x Tutte le righe di B

$\boxed{C_{11} = 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 = 10}$

$C_{12} = 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 = 10$

$C_{13} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 = 8$

$C_{21} = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 18$

$C_{22} = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 18$

$C_{23} = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 18$

Riga Colonna

Righe = A

Colonne = B

IL NUMERO DI ~~COLONNE~~ RIGHE DELLA MATRICE PRODOTTO È PARI al n. di Righe di A, IL NUMERO COLONNE è pari al numero colonne di B.

Lez 21.4

PROPRIETÀ n. righe e colonne MATRICE PRODOTTO

$$\underset{m \times p}{A} \cdot \underset{p \times n}{B} = \underset{m \times n}{C}$$

Le righe di A
e le colonne di B!

Esempi particolari:

colonna con 3 righe, pari alle 3 colonne di A.

$$\underset{3\times 3}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \underset{3\times 1}{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

I° moltiplico la riga 1 di A per l'unica colonna di B

$1 \cdot -1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 2$

II° moltiplico la riga 2 di A per l'unica colonna di B

$3 \cdot -1 + 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 3$

III° moltiplico la riga 3 di A per l'unica colonna di B

$0 - 2 + 4 = 2$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3 Righe come A
e 1 Riga come B

$A \cdot B$

~~n. righe = n.~~
n. col = n. righe

C

m n → n. colonne di B
↓
righe di A

Lez. 21.5

LA MATRICE IDENTICA

La matrice identica con 3 righe e 3 colonne è fatta così:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La regola è che gli elementi che stanno all'incrocio di una riga e una colonna con lo stesso indice ($a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{nn}$), ovvero gli elementi della diagonale, siano tutti uguali a 1, gli altri è $\emptyset$.

→ Elementi della diagonale $= 1$, gli altri $\emptyset$

La diagonale sopra è detta diagonale principale.

$$\boxed{A \cdot I = A}$$

26'40"

ad es. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} = A$$

N.B.: LE DUE MATRICI, A e I, DEVONO AVERE RIGHE E COLONNE DI NUMERO CONFORME AL PRODOTTO.

UNA APPLICAZIONE PRATICA, con un esempio; riconduci la formalizzazione per cibi, grassi, carboidrati, proteine:

A : 30% grassi, 10% carboidrati, 10% proteine
B : 20% " , 20% " , 5% "
C : 15% " , 15% " , 10% "

100 grammi di cibo $A = (\boxed{30, 10, 10})$
$B = (20, 20, 5)$
$C = (15, 15, 10)$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}30\\10\\10\end{matrix}} & \begin{matrix}20\\20\\5\end{matrix} & \begin{matrix}15\\15\\10\end{matrix} \end{pmatrix} \quad \text{colonne = cibi}$$

cibo A B C

Quanti grassi, carboidrati, proteine ingerisco se mangio 120 gr. di A, 50 gr. di B, 150 gr. di C?

$$\begin{array}{l} \text{grassi} \to \\ \text{carboidrati} \to \\ \text{proteine} \to \end{array} \begin{pmatrix} 30 & 20 & 15 \\ 10 & 20 & 15 \\ 10 & 5 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,20 \\ 0,50 \\ 1,50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68,5 \\ 44,5 \\ 29,5 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ cibo A $\quad \uparrow$ cibo B $\quad \uparrow$ cibo C

Occorre fare il prodotto righe per colonne delle due matrici

Proprietà del prodotto di matrici

$$A(BC) = (AB)C$$ Associativa

$$A(B+C) = AB + AC$$ Distributiva del prodotto rispetto alla somma

Righe e Colonne nel numero giusto

$$AI = IA = A$$

$a \cdot b = 0$ se $a = 0$ o $b = 0$ $\quad a, b$ reali, questo non vale per le matrici. Parliamo di

ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO

$$A \neq 0 \quad B \neq 0 \quad \text{ma} \quad AB = 0$$
(talvolta)

Ad esempio, per far capire come le matrici differiscono dai numeri.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

RIDUZIONE DI MATRICI

con parametri, per cui, al variare del valore del parametro, alcune operazioni si possono fare ed altre no.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & h \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

vediamo la riduzione di questa matrice per righe:
conviene subito evitare h come elemento speciale, perché potrebbe essere $\emptyset$. Conviene usare uno degli altri due.
Se cerco di far diventare speciale 1 ottengo la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & h \\ 1 & 0 & 3-h \end{pmatrix}$$ Tolgo la prima riga dalla seconda.

Si vede da questa riduzione che la matrice B che ha lo stesso rango della matrice A è una matrice in cui la prima riga è certamente non nulla, c'è un elemento speciale. La seconda riga è certamente non nulla, per l'1 qui presente. Quindi il rango, sia di A che di B vale 2. $\rho = 2$

Vediamo la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & h \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, riducendo come sopra ottengo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & h \\ 0 & 0 & 3-h \end{pmatrix}$$ che deve essere analizzata in funzione di h:

se $h = 3$ il rango vale 1 $\quad \rho = 1$
se $h \neq 3$ il rango vale 2 $\quad \rho = 2$

MATRICI $m \times n$

Somma

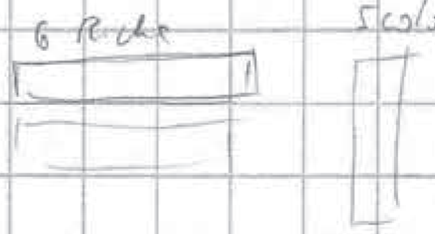
Prodotto di un numero per una matrice

Prodotto di due matrici righe per colonne:

$A(m \times n)$ per $B(n \times p) = C(m \times p)$

DOMANDE

1. Possono due matrici avere somma nulla? SI
2.) Può il prodotto di due matrici non nulle valere 0? SI
3. Quando si possono moltiplicare due matrici A e B tali che A ha 6 righe e B ha 5 colonne? MAI



Lez. 21.10

Lez. 22 MATRICI III

L'inversa e la trasposta

matrice trasposta

matrici ortogonali

matrice Inversa

- L'INVERSA e TRASPOSTA
- Le matrici simmetriche e antisimmetriche
- Le matrici ortogonali

MATRICE INVERSA

$$\underbrace{A \cdot A^{-1}}_{\text{inversa di } A} = A^{-1} \cdot A = I \text{ (matrice identica)}$$

A deve essere quadrata! Con $n \times m$ righe x col

Ad es. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tale che $A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow A \cdot X = \begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ 3a-c & 3b-d \end{pmatrix}$

L'INVERSA sarà per

Come se fossero 2 equazioni separate: 2 coppie da eq. separate

$$\begin{cases} 2a+c = 1 & \text{incognite } a \text{ e } c \\ 2b+d = 0 \\ 3a-c = 0 & \text{incognite } b \text{ e } d \\ 3b-d = 1 \end{cases} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$5a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{5} \Rightarrow c = \frac{3}{5}$

$5b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{5} \Rightarrow d = -\frac{2}{5}$

Quindi A è invertibile e l'abbiamo calcolata

Quindi in mancanza di metodi migliori, per calcolare l'inversa si risolvono equazioni.

Questa regola si complica nell'aumentare righe e colonne

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X \begin{pmatrix} 2a + d - g & 2b + e - h & 2c + f - i \\ 3a + 4g & 3b + 4h & 3c + 4i \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2a + d - g &= 1 \\ 2b + e - h &= 0 \\ 2c + f - i &= 0 \\ 3a + 4g &= 0 \\ 3b + 4h &= 1 \\ 3c + 4i &= 0 \\ 2g &= 0 \\ 2h &= 0 \\ 2i &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g = h &= \emptyset \\ a &= 0 \\ b &= \frac{1}{3} \\ i &= \frac{1}{2} \\ c &= -\frac{2}{3} \\ d &= 1 \\ e &= -\frac{2}{3} \\ f &= \frac{1}{2} + \frac{4}{3} = \frac{11}{6} \end{aligned}$$

MATRICE CHE NON HA L'INVERSA

Esempio semplice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2a+3c & 2b+3d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

NON POSSO MAI OTTENERE 1
=> A NON E' INVERTIBILE

LA MATRICE TRASPOSTA di una matrice

è la matrice data, scambiando le righe con le colonne

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, \dots, a_{1n} \\ a_{m1}, \dots, a_{mn} \end{pmatrix}$$ m righe n colonne

TRASPOSTA di $A = {}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{m1} \\ a_{1n} & a_{mn} \end{pmatrix}$ n righe m colonne

(nella trasposta gli indici non sono più quelli della matrice solo il 1° e l'ultimo elemento sono gli stessi)

In pratica la riga m diventa la colonna m

PROPRIETA' DELLA TRASPOSTA

${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ NELL'ORDINE INVERSO!

${}^t(aA) = a\,{}^tA$

MATRICI CHE CORRISPONDONO ALLA PROPRIA ~~[illegible]~~ TRASPOSTA

MATRICE SIMMETRICA (è quadrata)

$$\begin{pmatrix} \boxed{a} & \boxed{**} & \boxed{*} \\ \boxed{**} & \boxed{b} & \boxed{***} \\ \boxed{*} & *** & \boxed{c} \end{pmatrix}$$

ad es. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ è simmetrica.

SE UNA MATRICE È EQUIVALENTE ALL'OPPOSTA DELLA TRASPOSTA DICIAMO CHE È UNA MATRICE ANTISIMMETRICA

$A = -({}^tA)$ MATRICE ANTISIMMETRICA

IN GENERALE: $\begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{pmatrix}$

ad. es. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ -5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

DI SEGUITO INTRODUCIAMO

UNA MATRICE CHE SARÀ USATA NELLA GEOMETRIA, NEL CAMBIO DI COORDINATE, NELLE ROTAZIONI del piano e nello spazio

LA MATRICE ORTOGONALE (è quadrata)

La matrice invertibile tale che l'inversa è uguale alla trasposta

A quadrata ortogonale: ${}^tA = A^{-1}$

inversa e trasposta coincidono

ad. es. $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ è ortogonale (usata per le rotazioni)

$${}^tA = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}}_{A}$$

$${}^tA \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{cioè } {}^tA = A^{-1}$$

Esempio di calcolo della matrice inversa con un parametro h. Cercheremo di stabilire per quali valori di h la matrice A è invertibile. 35'16"

$$A = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{A \cdot X =} \begin{cases} a + ch = 1 \\ b + dh = 0 \\ 2a = 0 \\ 2b = 1 \end{cases} \qquad \begin{aligned} a &= 0 \\ b &= \tfrac{1}{2} \\ \boxed{hc} &\boxed{= 1} \\ hd &= -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

per $h = 0$ la matrice non è invertibile

Lez. 22 5

Dobbiamo supporre $h \neq 0 \Rightarrow c = \frac{1}{h}$

$$d = -\frac{1}{2h}$$

$\forall h \neq 0$ la matrice è invertibile

e la sua inversa $X = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{h} & -\frac{1}{2h} \end{pmatrix}$

Per $h = 0$ la matrice NON È INVERTIBILE.

Proviamo a scrivere la matrice per $h = 0$:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ Questa matrice ha rango 1.

Per $h \neq 0$ la matrice ha rango 2.

IL RANGO DI UNA MATRICE CI DARÀ INFORMAZIONI SULL'ESSERE O NON ESSERE INVERTIBILE

Domande:

1. La matrice identica con 5 righe è invertibile?
2. Quante righe ha la trasposta di una matrice con 8 righe e 12 colonne? (12×8)
3. Come è fatta una matrice contemporaneamente simmetrica e antisimmetrica?

Lez. 22 . 6

Lez 23 IL CONCETTO DI

APPLICAZIONE LINEARE

(è una funzione)

- Le applicazioni lineari in generale
- Il nucleo e l'immagine di una applicazione lineare
- Applicazioni lineari iniettive e suriettive
- Esempi di applicazioni lineari e non lineari

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad f(x,y) = x+y$$

$$(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y')$$

$$\downarrow f \qquad \downarrow f \qquad\qquad \downarrow f$$

$$\boxed{x+y} + x'+y' = (x+x') + (y+y')$$

risultato di f applicata alla coppia — risultato di f applicata alla seconda coppia — applico f alla somma delle coppie e ottengo questo numero

a) la funzione f trasforma la coppia (x,y) nel numero reale $x+y$

b) la funzione f trasforma la coppia (x',y') nel numero reale $x'+y'$

c) Vediamo che succede se facciamo la somma delle ~~funzioni~~ coppie

d) se applichiamo f a questa somma di coppie, cosa otteniamo?

e) la funzione f conserva la somma di coppie

→ LA FUNZIONE f CONSERVA LA SOMMA di COPPIE

Prendiamo ora un numero reale a e moltiplichiamolo per la coppia (x, y), otteniamo la coppia (ax, ay), a cui posso applicare f, ottenendo $ax + ay$

$$\begin{array}{ccc} a(x,y) & = & (ax, ay) \\ \downarrow f & & \downarrow f \\ a(x+y) & = & ax + ay \end{array}$$

Se applico f alla coppia $a(x,y)$ e poi lo moltiplico per a quindi f conserva il prodotto per uno scalare.

La funzione f conserva la somma e conserva il prodotto di un numero

Questo è un esempio di applicazione lineare tra due spazi vettoriali

Un'applicazione lineare conserva la somma e il prodotto per un numero.

PROPRIETÀ APPLICAZIONI LINEARI

$f : V \to W$ applicazione lineare

applicazione f (o funzione) tra due spazi vettoriali

somme diverse in spazi diversi

$\overset{\text{somma in } V}{f(v + v')} = \overset{\text{somma in } W}{f(v) + f(v')}$ si conserva la somma

$f(\overbrace{av}^{\text{elemento di } V}) = a \cdot f(v)$ si conserva il prodotto

elemento di W — elemento di W

v e v' sono vettori o elementi di V

$f(v+v')$ è un elemento dello s.v. W

$f(0_V) = 0_W$

l'opposto di v nello spazio V corrisponde con l'opposto di $f(v)$

$f(-v) = -f(v)$

nello spazio vettoriale W

Lez. 23.2

Esempio

$$f(x, y, z) = (x, y+z)$$

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

Abbiamo una funzione da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^2$

$$f(x', y', z') = (x', y'+z')$$

$\rightarrow (x+x', (y+z)+(y'+z'))$

$$f(x+x', y+y', z+z') = (x+x', (y+z)+(y'+z'))$$

f conserva la somma

$$\alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

$$\begin{aligned} f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) &= (\alpha x, \alpha y + \alpha z) \\ &= \alpha(x, y+z) \\ &= \alpha f(x, y, z) \end{aligned}$$

f conserva il prodotto

$\Rightarrow f$ è una applicazione lineare

$$f(0, 0, 0) = (0, 0)$$

$$f(-x, -y, -z) = (-x, -y-z)$$

(es. 23.3)

ESEMPIO

DI APPLICAZIONE NON LINEARE

$$f(x,y) = x^2$$

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

la somma $\underline{(x,y)+(x',y')}$

$$(1,2) + (3,1) = (\overset{3+1}{4},\overset{2+1}{3})$$

$$\downarrow f \qquad \downarrow f \qquad \qquad \downarrow f$$

$$1 + 9\ (=10) \neq 16$$

$1+9 \neq 16 \Rightarrow f$ non conserva la somma

$(2,1) \to 4$

$5 \cdot (2,1) = (10,5) \longrightarrow 100$

$5 \cdot 4 \neq 100$ f non conserva il prodotto

Anche $f(x,y) = x+1$ non è lineare

$$f(0,0) = 1 \neq 0\ !$$

APPLICAZIONI LINEARI - PROPRIETÀ

$$f : V \to W$$

$$f(v) = 0_W \iff v \in \operatorname{Ker} f$$

$$w = f(v) \iff w \in \operatorname{Im} f$$

vettori non nulli di V la cui immagine è $\emptyset$ e quali vettori formano un insieme di nome Ker f

vettori di W immagine di qualcosa formano l'insieme Im f.

Ad es. $f(x,y) = x+y$
$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Vediamo il significato di Ker f:

$f(0,0) = 0$ ma ci sono coppie (x,y) tali che $f(x,y) = 0$, basta che si abbia $x + y = 0 \Rightarrow x = -y$

Quindi tutte le coppie del tipo $(x, -x)$ mediante f si trasformano in 0.
Quindi il Ker f, in questo caso è il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ formato dalle coppie $(x, -x)$.

$$(x, -x) \xrightarrow{f} 0$$

Osserviamo che questo è un sottospazio vettoriale, sono tutti multipli del vettore $(1,-1)$
Questo è il sottospazio generato dalla coppia $(1,-1)$

E questo è vero in generale.

$f: V \to W$

$v \xrightarrow{f} 0_W$

$\operatorname{Ker} f \subseteq V$
è un sottospazio vettoriale di V

Vediamo $\operatorname{Im} f$

Im $f: V \to W$ ci sono vettori in W che sono $f(v)$ e vettori che non lo sono

$f(v) \to W$

L'insieme di questi vettori si chiama immagine di f ed è un sottospazio di W.

$\operatorname{Im} f \subseteq W$

Ad esempio, l'applicazione $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = (x,x)$$ è l'immagine

Ci sono vettori che sono immagine di nessun vettore? Sì.
Una coppia è immagine se è del tipo (x,x)
L'immagine sono le coppie del tipo (x,x), ovvero
$(1,1)$, $(2,2)$, $(0,0)$ ecc.

Ma $(1,0)$ non è immagine di niente.

Quindi alcune coppie sono nell'immagine ed altre non sono nell'immagine.

Precisamente l'immagine è l'insieme di tutte le coppie che si ottengono moltiplicando la coppia $(1,1)$ per un numero arbitrario x. Ed è il sottospazio vettoriale dei multipli di $(1,1)$.

Quindi l'immagine è il sottospazio di $\mathbb{R}$ formato dai multipli di $(1,1)$, cioè che ha come base $(1,1)$

L'immagine è $\neq \mathbb{R}^2$, ne è solo una parte

Ricordiamo che, dato $f: V \to W$

Ker f (nucleo) è un sottospazio di V formato da tutti gli elementi che si trasformano nello 0

Im f (immagine) è un sottospazio di W formato dai vettori che sono f di qualcosa.

L'USO DELL'IMMAGINE E DEL NUCLEO PER RICAVARE ALTRE PROPRIETÀ DALLE APPLICAZIONI LINEARI

Ker f

è formato dai vettori che si trasformano in 0

può essere formato dal solo $\{0_V\}$ oppure contenere anche altri vettori.

Se è formato dal solo $\{0_V\}$ questo significa che f è una applicazione lineare iniettiva

Iniettiva significa che se $v \neq v'$ allora $f(v) \neq f(v')$

Per verificare che una applicazione lineare sia iniettiva basta controllare che nel nucleo c'è il solo 0.

Ad. es verifichiamo se è iniettiva la funzione

$f(x,y) = (x, x)$ dobbiamo trovare le coppie tali che $(x, x) = (0,0)$

e sono tutte le coppie $(0, y) \Rightarrow y(0, 1)$
e otteniamo il sottospazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ generato (scrivibile come) dal vettore $(0, 1)$.
Allora Ker f non è ridotto al solo 0, quindi la funzione non è iniettiva. 28'21"

Se invece considero la funzione

$f(x,y) = (2x + y, x - y)$ e cerco il nucleo

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \qquad x = y \Rightarrow 3y = 0 \Rightarrow y = 0 \quad x = 0$$

Questa applicazione lineare è iniettiva.
L'iniettività di una applicazione lineare si valuta si verifica utilizzando il nucleo dell'applicazione lineare.

iniettivo

Con l'immagine di f si può studiare bene la suriettività di una applicazione lineare.

(en 23.3

$\mathrm{Im}\, f \qquad f: V \to W$

Essere suriettiva vuol dire che preso un elemento w nello spazio W di arrivo, esiste un v di V tale che $f(v) = w$

La formalizzazione è:

SURIETTIVITÀ: $w \in W \quad \exists\, v \in V$ t.c. $f(v) = w$

Il che equivale a dire che l'immagine di f coincide con W, ovvero

$$\mathrm{Im}\, f = W$$

Per stabilire se una applicazione lineare è o non è suriettiva basta andare a vedere l'immagine.

Per. es. consideriamo l'applicazione lineare seguente

non suriettiva: $f(x, y) = (x, x)$ è suriettiva?

NO, perché $\mathrm{Im}\, f \neq \mathbb{R}^2$, ci sono elementi di $\mathbb{R}^2$ che non sono della forma (x, x).

Quindi questa è una applicazione non suriettiva.

Se invece considero l'applicazione lineare

$f(x, y) = 3x$

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (andrebbe vedere che è lineare, lascio la verifica)

È suriettiva?

$m \in \mathbb{R}$ esiste una coppia $f(x,y) = m$?

Sì, basta che $x = \frac{m}{3}$, perché $f(\frac{m}{3}, y) = m$, ovvero ogni numero in ammette una controimmagine in $\mathbb{R}^2$.
Questa è una applicazione lineare di $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suriettiva.

Con l'uso dell'immagine, cercando di capire come è fatto questo sottospazio vettoriale che è l'immagine di f, si può capire se l'applicazione è suriettiva.

Un'applicazione $f: V \to W$ può essere contemporaneamente iniettiva e suriettiva.
Ovvero $\forall v$ c'è un'immagine in W; ⇒ c'è una funzione
due v diversi hanno immagini diverse $v \neq v'$
e ogni w proviene da un v.

Vale a dire che tra V e W c'è una corrispondenza biunivoca o se si preferisce f è una applicazione lineare (a. l.) biettiva o detta anche isomorfismo.

Lez. 23.11

Quali sono le caratteristiche delle applicazioni lineari che sono $\boxed{\text{isomorfismi}}$?

Sono contemporaneamente iniettive e suriettive, il nucleo è ridotto al solo $\emptyset$ e l'immagine è tutto W

Per es. l'a. l. vista prima

$$f(x,y) = (2x+y, x-y)$$ è iniettiva

è anche suriettiva,

quindi è anche biiettiva ed è quello che si chiama un isomorfismo.

dimostrare isomorfismo.

dimostrare che è anche suriettiva

Per far vedere che è un isomorfismo occorre far vedere che dati due numeri α e β nello spazio immagine che è $\mathbb{R}^2$, esistono x e y tali che:

$(\alpha, \beta) = (2x+y, x-y)$ e questo produce due equazioni

$$2x+y = \alpha$$
$$x-y = \beta$$

$$y = x - \beta$$
$$x = \frac{\alpha+\beta}{3}$$

$$y = \frac{\alpha+\beta}{3} - \beta$$

Quindi $\forall$ α e β a mio piacere trovo x e y in corrispondenza

Lez 23.12

E questo mi dice che questa applicazione è anche suriettiva e quindi questo è un esempio di isomorfismo applicato all'applicazione lineare biiettiva

COME SI FA A $\boxed{\text{TROVARE IL NUCLEO}}$ PER UNA APPLICAZIONE LINEARE

$$f(x,y,z) = (x+y,\ x-y,\ x+2z)$$
$$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

Trovare il nucleo significa cercare le terne x, y, z tali che

$$x+y=0$$
$$x-y=0$$
$$x+2z=0$$

Quindi trovare il nucleo significa risolvere equazioni, in questo caso di primo grado, senza termine noto. (omogenee)

Buona ragione per studiare i sistemi lineari cioè i sistemi di equazioni di primo grado.

Il nucleo si trova sempre, praticamente, in questo modo.

PER $\boxed{\text{TROVARE L'IMMAGINE}}$

devo vedere se la terna α, β, γ si può ottenere come $x+y,\ x-y,\ x+2z$, ovvero che

Lez. 23.13

degli x, y, z tali che:

$$\begin{cases} \alpha = x + y \\ \beta = x - y \\ \gamma = x + 2z \end{cases}$$

↳ valori assegnati

e quindi dobbiamo ancora risolvere delle equazioni lineari.

Visto che risolvere equazioni lineari ci risolve il problema, le risolviamo e finito.

SE: $f: V \to W$
$g: V \to W$

cioè se f è una a.l. V in W e g è una a.l. V in W, allora è definita l'applicazione

$$(f + g)(v) = f(v) + g(v)$$

ed anche $\alpha f: v \to \alpha \cdot f(v)$ prodotto di un numero per una applicazione.

INOLTRE possiamo definire il prodotto $g \cdot f$ di applicazioni.

Lez. 23.14

Se $f: V \to W$
$g: W \to Z$ sono due a. l.
allora
$$v \xrightarrow{f} f(v) \xrightarrow{g} g(f(v))$$

e ottengo una a. l. di V in Z che si chiama prodotto o composizione

In conclusione:

$f: V \to W$ lineare $f(v+w) = f(v) + f(w)$
$f(av) = a f(v)$

$f(v) = 0_W \iff v \in \ker f$ $\quad f$ iniettiva $\iff \ker f = \{0_V\}$

$w = f(v) \iff w \in \operatorname{Im} f$ $\quad f$ suriettiva $\iff \operatorname{Im} f = W$

Domande

1. Un'applicazione lineare di $\mathbb{R}^4$ in $\mathbb{R}$ può avere come nucleo tutto $\mathbb{R}^4$? SI
2. Ci sono applicazioni lineari di $\mathbb{R}^4$ in $\mathbb{R}^4$ che non sono suriettive? SI
3. Ci sono applicazioni lineari di $\mathbb{R}^4$ che non sono iniettive? SI

Lez. 23.15

Lez. 24 : APPLICAZIONI LINEARI e MATRICI

- LA MATRICE ASSOCIATA AD UNA APPLICAZIONE LINEARE
- L'APPLICAZIONE LINEARE ASSOCIATA AD UNA MATRICE
- COME SI USANO LE MATRICI PER STUDIARE LA SURIETTIVITA' E L'INIETTIVITA'.

MATRICE ASSOCIATA AD UNA App. Lin.

$$f(x,y,z) = (ax+by+cz,\ dx+ey+fz)$$

$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$M_f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Siccome stiamo lavorando tra uno s.v. $\mathbb{R}^3$ e uno s.v. $\mathbb{R}^2$ prendiamo i versori fondamentali di $\mathbb{R}^3$

$$e_1 = (1,0,0)$$
$$e_2 = (0,1,0)$$
$$e_3 = (0,0,1)$$

Vediamo che cosa capita se applichiamo f a questi 3 vettori che formano la base di $\mathbb{R}^3$.

$$f(e_1) = (a,d)$$
$$f(e_2) = (b,e)$$
$$f(e_3) = (c,f)$$

Confrontiamo il risultato con i versori e la matrice M_f, costruita dai coefficienti

$$M_f = \begin{pmatrix} \boxed{a} & \boxed{b} & \boxed{c} \\ \boxed{d} & \boxed{e} & \boxed{f} \end{pmatrix}$$

$f(e_1)$ $f(e_2)$ $f(e_3)$

(a, d)
(b, e)
(c, f)

le immagini dei versori fondamentali

Noi notiamo che f del primo versore è (a, d), che è la prima colonna della matrice, e così gli altri.

Allora gli elementi della matrice M_f hanno un doppio significato:
posso pensare alle righe di questa matrice guardando ai coefficienti delle variabili x, y, z. La prima riga mi dice quali sono i coefficienti di x, y, z nella prima componente, la seconda riga mi dice quali sono i coefficienti di x, y, z nella seconda componente. Ma hanno un significato anche le colonne. La colonna 1 mi dice qual'è la componente f del primo versore, la seconda colonna mi dice che è f del secondo versore e la terza colonna mi dice che è f del terzo versore.

Quindi sia le righe che le colonne hanno un significato e questi significati vanno bene insieme

Allora possiamo vedere cosa succede per applicazioni lineari $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Lu 24.2

Vediamo come si può costruire la matrice associata all'applicazione lineare con questa regola.

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

è un'a.l. da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$

I versori di $\mathbb{R}^n$ sono:

$$\left.\begin{array}{l} e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0) \\ e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0) \\ e_n = (0, 0, 0, \dots, 1) \end{array}\right\}$$

Ognuno di questi versori si trasforma mediante l'a.l. f in un elemento di $\mathbb{R}^m$, un elemento che ha delle componenti e diventa:

Trasformazione dei versori di $\mathbb{R}^n$

$$\left.\begin{array}{l} e_1 = (1, 0, 0, \ , 0) \xrightarrow{f} (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}) \\ e_2 = (0, 1, 0, \ , 0) \xrightarrow{f} (a_{12}, a_{22}, \ , a_{m2}) \\ e_n = (0, 0, 0, \ , 1) \xrightarrow{f} (a_{1n}, a_{2n}, \ , a_{mn}) \end{array}\right\}$$

abbiamo ottenuto n vettori che sono le immagini fondamentali di $\mathbb{R}^n$

In generale costruiamo la matrice associata all'a.l. f così:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix} = M_f$$

le colonne sono le trasformazioni dei versori

la I^a colonna sarà f del I versore fondamentale

$$\left.\begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_n) \end{array}\right\}$$

Abbiamo scritto le colonne in termini di immagini dei versori fondamentali.

Lez. 24.3

Però abbiamo visto che anche le righe hanno un significato.
Il senso della riga è dato da come opera f, che opera su n-uple:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) =$$

Lo possiamo applicare a qualsiasi n-upla l'applicazione lineare, il risultato deve essere un elemento di $\mathbb{R}^m$, cioè m elementi

Riga 1

$$(\boxed{a_{11}} x_1 + \boxed{a_{12}} x_2 + \dots + \boxed{a_{1n}} x_n,$$ 1ª componente 12'30''

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n,$$ 2ª componente

$$\vdots$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n)$$ n-esima componente

LE RIGHE DELLA MATRICE HANNO IL SIGNIFICATO DEI COEFFICIENTI CHE DEVO ASSEGNARE A $x_1, x_2, \dots, x_n$ PER OTTENERE CON LA PRIMA RIGA LA PRIMA COMPONENTE, CON LA SECONDA RIGA della matrice LA SECONDA COMPONENTE, CON LA N-ESIMA RIGA della matrice LA N-ESIMA COMPONENTE.

ATTENZIONE PERCHÉ LA MATRICE M_f ASSOCIATA ALL'APPLICAZIONE LINEARE $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ HA m RIGHE e n COLONNE

Numero Righe coincide con la dimensione di $\mathbb{R}^m$
Numero Colonne coincide con la dimensione di $\mathbb{R}^n$ da cui f è definita (cioè spazio di partenza)

OSSERVIAMO CHE LE COMPONENTI DI f

$x_1 \dots x_m$ CHE SONO m ELEMENTI SONO OGNUNO UNA COMBINAZIONE LINEARE DI $x_1 \dots x_n$, CIOÈ È UN POLINOMIO OMOGENEO DI PRIMO GRADO IN $x_1, x_2, \dots, x_n$.

NON COMPARE TERMINE NOTO e $x_1, x_2, \dots, x_n$ COMPAIONO SOLO AL PRIMO GRADO.

LO STESSO PER LA SECONDA COMPONENTE, LA TERZA ecc

Quindi una applicazione lineare è caratterizzata dal fatto che f di una n-upla ha m componenti ciascuna delle quali è una combinazione lineare, un polinomio omogeneo di primo grado in $x_1, x_2, \dots, x_n$ con coefficienti determinati dalla matrice.

Importante nelle applicazioni lineari, per capire se è una o l'altra

Esempio di studio di quanto visto:

$$f(x,y) = (x+2y,\ x-2y,\ x+y)$$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la matrice associata deve avere 2 colonne e 3 righe

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

osserviamo che i $f(1,0) = (1,1,1)$
$f(0,1) = (2,-2,1)$ } vedi le colonne!!!

Lo scrivere con questa applicazione vi dice che è lineare perché 1 2 e 3 sono polinomi di primo grado omogenei nelle variabili x e y che variano in $\mathbb{R}^2$.

$x+2y \quad x-2y \quad x+y$

Lez 24.5

Se prendiamo

$f(x,y,z) = (x+z,\ y+\boxed{1})$ questo termine noto rende $y+1$ non un polinomio omogeneo di primo grado in x,y,z

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

questa non è una applicazione lineare perché, è vero che $x+z$ è un polinomio omogeneo di primo grado in x, y, z, però non è vero che $y+1$ è un polinomio di primo grado in x, y, z perché c'è il termine noto 1.

Utilizziamo questo fatto anche per capire se un'applicazione è lineare o no.

L'immagine deve essere fatta di polinomi omogenei di primo grado nelle variabili, senza termini noti
→ è un'applicazione lineare.

LA TECNICA FONDAMENTALE PER SCRIVERE LA MATRICE ASSOCIATA è
GUARDARE I COEFFICIENTI E SCRIVERLI SULLE RIGHE,
oppure si prendono i vettori fondamentali, se ne fanno le immagini e si mettono nelle colonne. Due le possibilità

Quindi abbiamo visto il rapporto che c'è fra applicazione lineare e matrice

Ora vedremo il contrario, ovvero capire se assegnata una matrice automaticamente questa significa anche applicazione lineare o no.

Ad es.: $\left(\begin{array}{|c|c|c|} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right) = A$

si deduce che:

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

numero delle righe

numero delle colonne

$f(x, y, z) = (x - y + 3z, \; 2x + 2y)$

prima componente dalla prima riga, la seconda componente dalla seconda riga

f è un applicazione lineare perché sono polinomi di primo grado e coefficienti in x, y, z.

E se voglio tornare indietro, alla matrice associata:

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = A \text{ ovvero ritrovo } A$$

Quindi la corrispondenza è biunivoca: a.l. / matrice e matrice / a.l.

Si tratta di a.l. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con ~~...~~ m righe e n colonne

APPLICAZIONI LINEARI INIETTIVE e SURIETTIVE

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

iniettiva:

$v \neq v' \Rightarrow f(v) \neq f(v')$

suriettiva:

l'immagine di f è tutto $\mathbb{R}^m$, ogni vettore di $\mathbb{R}^m$

$\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^m$

Invertibile:

è contemp. iniettiva e Lez 24.7 suriettiva e biettiva f^{-1} $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

f^{-1} $\quad v \xrightarrow{f} f(v) = v'$

$\cancel{v' \to f^{-1}}$

$v' \xrightarrow{f^{-1}} v = f^{-1}(v)$

Tutte queste cose possono essere pensate in termini di matrici associate ad applicazioni lineari. 25'30"

ESAMINIAMO IL PROBLEMA DELL'APPLICAZIONE LINEARE SURIETTIVA

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$\boxed{\text{suriettiva} \Rightarrow \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^m}$ SURIETTIVA

le matrici

$$M_f = \begin{pmatrix} \begin{array}{ccc} [\;] & \cdots & [\;] \\ f(e_1) & & f(e_n) \end{array} \end{pmatrix}$$

se prendo un vettore v c.l. di $e_1, \dots, e_n$, allora $f(v)$ è una c.l. di $f(e_1), \dots, f(e_n)$

in altre parole $f(e_1), \dots, f(e_n)$ sono generatori dell'immagine di f. ~~L~~'immagine di f è un s.v. di $\mathbb{R}^m$ generato da questi vettori

$f(v) = $ c.l. $f(e_1), \dots, f(e_n)$

Come stabilisco che M_f dà luogo ad una a.l. suriettiva?

Lez. 24. 8

BASTA VEDERE SE

$f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$ generano tutto lo s.v. $\mathbb{R}^m$.

Questo si può risolvere guardando la matrice
Siccome lo s.v. $\mathbb{R}^m$ ha dimensione m e i vettori sono generatori basta
stabilire se lo spazio generato da queste colonne $f(e_1) \ldots f(e_n)$
è uno spazio di dimensione m.

Questo si stabilisce calcolando il rango

Se il rango della matrice M_f è m allora lo
spazio delle colonne ha dimensione m, cioè che
l'immagine coincide con tutto $\mathbb{R}^m$.

$$\rho(M_f) = m \text{ (numero delle righe)}$$

IMETTIVITÀ

Ricordiamoci che una applicazione lineare è iniettiva se e solo se
$\ker f = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$

Ma noi sappiamo che la dimensione di $\ker f$ è:

$$\dim \ker f = n - \dim \operatorname{Im} f$$
$$= n - \rho(M_f)$$

e vogliamo che questo sia $\emptyset$.

Questo è $\emptyset$ quando il rango della matrice M_f sia n = numero delle colonne

$$\rho(M_f) = n = \text{n. colonne.}$$

Quindi l'applicazione lineare è iniettiva se il rango della matrice associata è pari al numero delle colonne.

Le righe ci danno informazioni sulla suriettività.
Le colonne ci danno informazioni sulla iniettività.

Se $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$\rho(M_f) = n$, sia il numero di colonne che di righe, l'applicazione lineare è sia iniettiva che suriettiva

Cioè è una applicazione lineare invertibile

APPLICAZIONI LINEARI INIETTIVE E SURIETTIVE

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

iniettiva $\rho(M_f) = n$

suriettiva $\rho(M_f) = m$

invertibile $\rho(M_f) = m = n$

24.10

Esempio

$$f(x,y,z,t) = (x-y+z,\ x+y-t)$$

$$\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \rho = 2$$

a.l. suriettiva

Non può essere iniettiva perché il rango dovrebbe essere 4, ma è impossibile, perché esso deve essere sempre minore di 4.

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ il rango della matrice associata non può superare il più piccolo dei due numeri.

se $n > m \Rightarrow \rho$ non può essere n, l'a.l. non è iniettiva

se $n < m \Rightarrow \rho$ non può essere m, l'a.l. non è suriettiva.

Esempio

$$f(x,y) = (x-y,\ x+y,\ x) \qquad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \rho = 2 \quad \text{è iniettiva}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho = 2$$

l'a.l. è invertibile, è iniettiva e suriettiva

L'inverso di questa matrice

$$f(x,y) = (x-y, \; x+y)$$

$$f^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$M_f \qquad M_{f^{-1}} = (M_f)^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a-c = 1 \\ b-d = 0 \\ a+c = 0 \\ b+d = -1 \end{cases}$$

$b = d$

$a = -c$

$a - c = 1$

$2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

$2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$

$c = -\frac{1}{2}$

$d = \frac{1}{2}$

$$M_f^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$, quindi l'a.l. inversa è

Lez. 24.12

$$f^{-1}(x,y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y,\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right)$$

SE f e g sono due a.l. tali che si possa calcolare l'a.l. g∘f composta delle 2, g ha una matrice associata e f ha una matrice associata:

$$M_g \cdot M_f = M_{g \cdot f}$$

$$f^{-1} \cdot f = id \quad (M_{f^{-1}}) \cdot M_f = I$$

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

iniettiva $\rho(M_f) = n$ $\ker f = \{0_v\}$

suriettiva $\rho(M_f) = m$ $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^m$

invertibile $\rho(M_f) = m = n$ (matrice quadrata)

Lez. 24.13

Domande

1. La matrice associata ad una a. l. di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^4$ può avere ~~r~~ rango 1? SI
2. È iniettiva una a. l. di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ che ha matrice di rango n?
3) È suriettiva una a. l. di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ che ha matrice di rango $m-1$?

Lezione 25 SISTEMI LINEARI I

risoluzione dei sistemi ridotti

- I sistemi lineari
- Come si risolve un sistema lineare ridotto
- Come si risolve un sistema lineare qualsiasi
- Alcuni esempi pratici di risoluzione di un sistema

$$f(x, y, z) = (x+y,\ x-z)$$

a.l. di $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

per trovare il nucleo

$$\begin{cases} x+y = 0 \\ x-z = 0 \end{cases}$$ la posto soluz

$z = x$

$y = -x \Rightarrow x$ qualsiasi

$z \in y$ in funzione di x

La soluzione più generale è l'insieme delle terne $(x, -x, x)$

LA RISOLUZIONE DI SISTEMI LINEARI CON LE MATRICI IN MODO DA SAPERE SE IL SISTEMA AMMETTE SOLUZIONI E QUALI SONO LE SOLUZIONI.

CI SONO SISTEMI PIÙ FACILI ~~DA RISOLVERE~~ E ALTRI PIÙ DIFFICILI DA RISOLVERE

Ad es.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2y - z = 0 \\ 4y = 5 \end{cases}$$

è un sistema facile da risolvere.
Ci sono molti $\emptyset$, molti coefficienti $\emptyset$.

Infatti una eventuale matrice sarebbe, se i termini non ... Ponendo $\emptyset$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che è una matrice ridotta

MA COSA HANNO A CHE FARE I SISTEMI LINEARI CON LE MATRICI?

UN SISTEMA LINEARE GENERICO è del tipo

il II° indice ci dice quale incognita stiamo considerando; ed è moltiplicato x_1. Il I° indice ci dice che siamo nella 1° equazione

$$\begin{array}{l} \text{equazioni } 1 \\ 2 \\ \dots \\ m \end{array} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad x_1, x_2, \dots, x_n$$

Quindi m equazioni; la prima equazione in n incognite, $x_1, \dots, x_n$

Un sistema di m equazioni ed n incognite lo possiamo rappresentare come sopra.
È molto chiaro come il sistema sia collegato ad una matrice.
Anzi, le matrici possono essere due perché le a formano una matrice di m righe e n colonne; i termini noti del sistema sono una ulteriore colonna.

25.2

Quindi avremo una matrice A formata dai coefficienti ed una matrice B formata dai termini noti, che formano complessivamente una colonna.

Quindi avremo la matrice dei coefficienti A e la matrice dei termini noti B.
Scriveremo

segno di separazione

$$(A \mid B)$$

termini noti

coefficienti

SISTEMI LINEARI e MATRICI

$$AX = B$$

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$ matrice completa

X è la matrice delle incognite e dobbiamo ricordarci che la dobbiamo scrivere come

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ se vogliamo sfruttare appieno le proprietà delle matrici: scrivere in colonna le incognite, allora moltiplicare la matrice A dei coefficienti per la colonna significa moltiplicare la prima riga di A per la colonna delle incognite e si ottiene la prima equazione o "primo membro" e così via

Il risultato del prodotto AX è una matrice che ha una sola colonna ovvero

$$AX = B \qquad AX = \text{colonna dei termini noti}$$

Questo ci permette di utilizzare tutte le nostre conoscenze sulle matrici, il rango, la riduzione ecc

Un esempio concreto

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+y-2z=0 \\ x+y=4 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \text{ matrice completa}$$

$\underbrace{\qquad}_{A}$ $\underbrace{\quad}_{B}$

sia $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\boxed{AX = B}$ il sistema è $AX = B$

LA RISOLUZIONE DI UN SISTEMA LINEARE

Un sistema lineare si risolve più facilmente se ci sono molti $\emptyset$. Per essere precisi, se

$AX = B$ ridotto con A (matrice dei coefficienti) ridotta per righe

è un sistema lineare di m equazioni in n incognite è più facile risolvere il sistema se questo è ridotto. Questo vuol dire che la matrice A è ridotta per righe.

Ad. es.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ \quad\; 4y - 3z = 0 \\ \quad\; 5y \qquad\; = 10 \end{cases}$$

sistema di 3 equazioni in 3 incognite.

$AX = B$ diventa

di attenzione interesse

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & -1 & 1 \\ 0 & 4 & \boxed{-3} \\ 0 & \boxed{5} & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

La matrice A è ridotta per righe!
□ gli elementi speciali

Per risolvere un simile sistema si parte dall'ultima equazione, perché è quella che contiene più zeri, cioè meno incognite.

$$5y = 10 \Rightarrow y = 2$$

$$8 - 3z = 0 \Rightarrow z = \frac{8}{3}$$

$$2x - 2 + \frac{8}{3} = 1$$

$$x = \frac{1 + 2 - \frac{8}{3}}{2}$$

Sistema risolto!
Facilitato perché è ridotto per righe

MATRICE COMPLETA DEL SISTEMA

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 10 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{A} \quad \underbrace{\quad}_{B}$$

Questo è un sistema ridotto per righe perché A è ridotta per righe

LA MATRICE COMPLETA È RIDOTTA PER TRASCINAMENTO DELLA MATRICE A

Quando un sistema è ridotto per righe si risolve partendo dall'ultima equazione e tornando alla prima.

SISTEMI RIDOTTI

Sistema ridotto $AX = B$

qualunque — elemento speciale, elemento non nullo, al di sotto del quale ci sono degli zeri.

zero

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} q & \square & q & q & q & q \\ \square & 0 & q & q & q & q \\ 0 & 0 & \square & q & q & q \\ 0 & 0 & 0 & q & \square & q \\ 0 & 0 & 0 & \square & 0 & q \end{array}\right)$$

A ridotta per righe — B

$AX = B$

ultima equazione, con il maggior numero di 0 e la risolvo rispetto ad una delle incognite in funzione delle altre. Risalgo alla penultima equazione e ripeto il ragionamento fino ad arrivare alla prima.

Ad esempio, partendo dalla matrice completa:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Qui, l'ultima equazione è $2z + t = 0 \Rightarrow t = -2z$

la penultima equazione è $2y - z + t = 1 \Rightarrow \overline{2y - z - 2z = 1}$ con solo y e z

e scriviamo y in funzione di z.

$\Rightarrow y = \frac{1+3z}{2}$

Nella matrice, che è ridotta per righe, l'elemento $\boxed{2}$ è un elemento speciale ed è il coefficiente di y, quindi y compare nella seconda equazione mentre non compare nell'ultima, allora scriviamo y in funzione di z e troviamo $y = \frac{1+3z}{2}$

A questo punto sostituiamo tutto ciò che abbiamo trovato nella prima equazione

$2x + \frac{1+3z}{2} + 4z - 2z = 1$, una equazione in x e z.

$4x + 1 + 3z + 8z - 4z = 2$

A questo punto ricaviamo x in funzione di z in quanto x compare nella prima equazione, ma non nelle successive.

$$x = \frac{1 - 2z - \frac{1+3z}{2}}{2}$$

Tutto questo ci porta alla considerazione che ci sono 4 incognite e 3 equazioni. Una delle incognite la posso scegliere a piacere, in questo caso è z, e trovo tutte le altre!

Si dice che z è incognita libera. 25.7

z è incognita libera, con assegnamento a piacere.

Ma allora il sistema ha infinite soluzioni, una per ogni scelta di z.

Per $z = 0$, $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{2}$, $t = 0$

Per $z = 10$, $x =$, $y =$, $t =$ ecc.

Può capitare che un sistema lineare abbia infinite soluzioni, con quello che si chiama una incognita libera.
Nulla vieta che vi siano più incognite libere.

E' fondamentale partire dall'ultima equazione per risolvere il sistema lineare.

Un sistema ridotto può anche essere
PRIVO DI SOLUZIONI

Ad esempio, aggiungendo la riga 0 0 0 0 1 2, è evidente che non esiste soluzione, essendo

$$0x + 0y + 0z + 0t = 2$$

Questi sistemi privi di soluzione si dicono irresolubili o incompatibili.
Nei sistemi ridotti è facile individuare questi casi, infatti c'è una riga tutti 0 con termine noto diverso da 0.

DATO UN SISTEMA LINEARE $AX=B$

dobbiamo stabilire:

1. se è risolubile, cioè se ci sono soluzioni, cioè se ci sono $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ che sostituiti per dentro mi danno una identità, ovvero il primo membro uguale al secondo.
2. Ammesso che sia risolubile, dobbiamo trovare le soluzioni, quindi trovare tutte le n-uple, non solo qualcuna.

Per i sistemi ridotti per righe si può fare direttamente e facilmente. Ma se il sistema non è ridotto per righe, non è semplice, con il metodo di sostituzione.
La tecnica di riduzione rende la soluzione più facile.

Quindi dato un sistema $AX=B$ non ridotto dobbiamo trovare un sistema $A'X=B'$ che abbia le stesse soluzioni del sistema dato, però è un sistema ridotto per righe. Risolvendo il sistema ridotto per righe, risolviamo anche quello non ridotto.

$$AX=B \text{ diventa } A'X=B'.$$

qualunque

zero — qualunque — elemento non nullo — qualunque

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} q & q & q & q & q & q \\ q & q & q & q & q & q \\ q & q & q & q & q & q \\ q & q & q & q & q & q \\ q & q & q & q & q & q \end{array}\right) \longmapsto (A'|B') = \left(\begin{array}{ccccc|c} q & \boxed{\ } & q & q & q & q \\ \boxed{\ } & q & q & q & q & q \\ 0 & 0 & \boxed{\ } & q & q & q \\ 0 & 0 & 0 & q & \boxed{\ } & q \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\ } & 0 & q \end{array}\right)$$

Riduciamo per righe solo la matrice dei coefficienti

$$\begin{cases} x + y + z - t = 1 \\ x - y + 2z + t = 0 \end{cases}$$

4 incognite

2 equazioni

Sistema non ridotto, ~~la~~ Verminando non lo è ridotto o al primo

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$\downarrow$ Riduzione per righe

$$\begin{array}{c} \\ = \mathrm{I}^a + \mathrm{II}^e \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

e il nuovo sistema diventa

$$\begin{cases} x + y + z - t = 1 \\ 2x + 3z = 1 \end{cases}$$

che è un sistema ridotto, facilmente risolubile.

Ricavo x in funzione di $z \Rightarrow x = \frac{1 - 3z}{2}$

e sostituisco nella prima equazione in cui compaiono y, z e t.

Due le scelgo a piacere e una sarà funzione delle altre.

Domande

1) Un s.l. con m equazioni e n incognite con n < m è sempre privo di soluzioni ? NO?

2) Un sistema di m equazioni ed m+1 incognite ha sempre almeno una soluzione ?

3) Può un sistema ridotto essere privo di soluzioni ? Sì.

25.10

Lez 26 SISTEMI LINEARI II

Teorema di Rouché - Capelli e incognite libere

- Il Teorema di Rouché - Capelli
- Le incognite libere di un sistema lineare
- I sistemi lineari omogenei (Termine noto nullo)
- Come si trova il nucleo di una applicazione lineare

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad AX = B$$

Il S.L. collegato a questa matrice è un sistema lineare di 3 equazioni (righe) e 5 incognite (colonne).

Per risolvere il sistema si prende la <u>matrice completa</u> del sistema

questo è già un elemento speciale

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & \boxed{-1} & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

e si riduce per righe. La riga 1 ha già un elemento speciale. Basta fare comparire uno nella seconda. Ad esempio sottraendo la seconda riga dalla terza.

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & | & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$R_3 - R_2$

incognite: $x \quad y \quad z \quad t \quad u$

e questa è inutile per noi.

Possiamo riscrivere il S.L.

$-2x + u = 0 \Rightarrow u = 2x$ e lo sostituiamo nella 2ª equazione

$-\cancel{x} + y \quad + t \quad + 2x = 1$

$\Rightarrow x + y + t = 1$ e ricaviamo quale in funzione di una incognita che non compaia nell'ultima equazione, come t.

$t = 1 + y - x$ e sostituiamo t nella 1ª eq.

$$x + y - z + \overbrace{\boxed{1 - x + y}}^{t} + \overbrace{\boxed{2x}}^{u} = 0$$

semplificando $2x + 2y - z + 1 = 0$ e, visto che z compare solo in questa equazione e non nelle precedenti ricaviamo in funzione di z:

x e y incognite libere $\in$

$z = 2x + 2y + 1$, quindi z è funzione di x e y

$u = 2x$, u è funzione di x

$t = 1 - x + y$, t è funzione di x e y

Allora, in generale osserviamo che le incognite x e y che possono essere assegnate a piacere, sono due incognite libere

Invece z, u e t non possono essere assegnate a piacere, ~~ma possono essere assegnate~~ ma dipendono da x e y.

Su 5 incognite, 2 sono libere e 3 dipendono da queste

Allora vediamo di ricavare sulle incognite libere informazioni, guardando la matrice ~~completa~~ ridotta

$$A'B' = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{A'}$ B

la matrice dei coefficienti ha tre righe non nulle ed è ridotta

$\rho(A') = 3$ matrice dei coefficienti

stesso rango

$\rho(\underbrace{A'|B'}_{\text{matrice completa}}) = 3$ matrice completa

in questo sistema la matrice dei coefficienti e quella completa hanno lo stesso rango

Proprietà del Teorema di Rouché Capelli: un sistema risolubile ha il rango della matrice dei coefficienti uguale al rango della matrice completa.

Abbiamo 5 incognite in totale, di cui 2 libere.

$5 - 2 = 3$ e 3 è il rango della matrice A' e della matrice $A'|B'$.

Proprietà: il numero delle incognite libere è ottenuto dal numero totale di incognite dal rango della matrice dei coefficienti (equivalente al rango della matrice completa)

n. incognite libere = n. totale incognite − rango della matrice

n. incognite libere $= n - \rho(A')$

se e quindi ci sono soluzioni

26.3

Dato il sistema lineare

$$AX = B$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{riduzione per righe}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow$$

matrice completa

I pivot: $R_2 - R_1$

$R_3 - 2R_1$

la terza riga $= R_3 - R_2$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

A'

Ma allora, la terza equazione diventa

$0 = 3$, quindi questo sistema è privo di soluzioni.

In termini di matrici questo significa quanto segue: la matrice A dei coefficienti, dopo aver ridotto

$\rho(A) = 2$
$= \rho(A')$

$\neq$ => Sistema lineare senza soluzioni.

Ma il rango della matrice completa è 3,

$$\rho(A|B) = 3$$

Quando un sistema lineare è privo di soluzioni il rango della matrice dei coefficienti è diverso dal rango della matrice completa.

$$\rho(A) = 2 < \rho(A|B) = 3$$

Quindi, utilizzando le matrici, abbiamo metodi per stabilire se un sistema lineare ammette soluzioni e quante soluzioni ammette.

Questo vale per i sistemi ridotti e per qualsiasi sistema, perché un sistema qualsiasi può essere trasformato in un sistema ridotto lasciando invariate le soluzioni.

TEOREMA DI ROUCHÉ - CAPELLI

Sistema lineare $AX = B$
di m equazioni in n incognite con

$$\underset{\text{matrice dei coefficienti}}{\rho(A)} = p, \quad \rho(\underbrace{A|B}_{\text{matrice completa}}) = q$$

Risolubile $\iff p = q$
(o sistema compatibile)

allora ci sono $\boxed{\infty^{n-p}}$ soluzioni
ovvero $n - p$ incognite sono libere

Il sistema può avere 2000 equazioni e il rango essere 3.

$$\underset{\text{n° eq.}}{n} \leq \underset{\text{rango}}{p}$$

Il TEOREMA di ROUCHÉ-CAPELLI ci dice se un sistema è risolubile e quante soluzioni ha

In un sistema $AX = B$

possiamo ignorare le incognite, ma stabilire solo i ranghi della matrice dei coefficienti e della matrice completa.

$$\rho(A) \overset{\text{sistema risolubile}}{=} \rho(A|B)$$

$\neq$ sistema non risolubile

∃ e incognite libere $=$ n. incognite $- \rho(A)$

Per stabilire se $\rho(A) = \rho(A|B)$ usiamo la riduzione delle matrici per righe.

Una volta stabilito che $\rho(A) = \rho(A|B)$ possiamo procedere con la risoluzione.

E sappiamo che il numero delle incognite libere è

n. incognite libere $= n - \rho(A)$

n = n. incognite

e se ne troviamo in un numero diverso, abbiamo sbagliato.

Ad es. se abbiamo il sistema lineare in cui il numero delle incognite (2) è minore del numero delle equazioni (3)

$$m=3\begin{cases} 1 & x + y = 1 \\ 2 & x - 3y = 2 \\ 3 & x + 2y = 0 \end{cases}$$

$\underbrace{1 \quad 2}_{n=2}$

numero equazioni $m = 3$

numero incognite $n = 2$

ma abbiamo detto che il numero delle equazioni non ha la minima importanza.

E vedere poi il

$\boxed{\text{rango.}}$

La matrice completa è:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 6 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

questa matrice, con due colonne, non può avere rango > 2

elementi speciali

$$\rightarrow \underset{R_3/6 \cdot 4 + R_2}{} \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-4} & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{\frac{1}{3}} \end{array}\right)$$

elemento speciale

rango 2

rango 3

Quindi la matrice dei coefficienti ha rango 2.
La matrice completa ha rango 3.
Il sistema non è risolubile perché $2 < 3$

VEDIAMO UN TIPO DI SISTEMA LINEARE CHE AMMETTE SOLUZIONI, in base al teorema di Rouché-Capelli, UN SISTEMA LINEARE OMOGENEO, in cui il termine noto vale sempre $\emptyset$.

SISTEMI OMOGENEI

$$AX = 0$$

ha sempre $n - \rho(A)$ incognite libere

$AX = 0$ avrò una matrice

$$\left(\begin{array}{c|c} \cdots & 0 \\ \cdots & 0 \\ \cdots & 0 \end{array}\right) \qquad \rho(A) = \rho(A|B) \text{ SEMPRE.}$$

inoltre poiché

$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. questa è una soluzione.

Il problema interessante di un sistema omogeneo è quello di scoprire se oltre alla soluzione nulla ci sono anche altre soluzioni.

Per sapere quante sono il numero di soluzioni, se ho un sistema di n incognite e m equazioni e $\rho = \rho$ i ranghi della matrice dei coefficienti e della matrice completa, allora esistono

$$n - \rho \text{ incognite libere}$$

Una e una soluzione c'è quando il numero di incognite libere è $\emptyset$, ovvero quando

$$n = \rho$$

ovvero il numero delle incognite è uguale al rango della matrice dei coefficienti, che è uguale a quello della matrice completa. Formalmente saranno $\infty^{n-\rho} = 1 = \infty^0$

questa è la soluzione nulla

Ammette altre soluzioni se

$$n - \rho > 0$$

che mi dice il numero di incognite libere, non il numero di soluzioni

Il numero di soluzioni sono tante quanti sono i valori che posso assegnare ad almeno una incognita libera.
Se l'incognita libera è una, x, essa può variare nei numeri reali, quindi le soluzioni sono infinite.

NON È POSSIBILE CHE UN SISTEMA LINEARE ABBIA UN NUMERO FINITO DI SOLUZIONI DIVERSO DA 1 O DA 0.
DA 1 si salta a infinite.

I SISTEMI OMOGENEI O HANNO UNA UNICA SOLUZIONE (QUELLA NULLA) OPPURE NE HANNO INFINITE.

LA RICERCA DI SOLUZIONI NON NULLE EQUIVALE A VERIFICARE SE CI SONO INFINITE SOLUZIONI PER IL NOSTRO SISTEMA OMOGENEO.

LA CONDIZIONE CHE CI SONO INFINITE SOLUZIONI È CHE IL NUMERO DELLE INCOGNITE SUPERI IL RANGO, dice
mette NON IL N. DELLE EQUAZIONI

Esempio: $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - 5z = 0 \end{cases}$ sistema di 2 eq. e 3 incognite

$\rho(A) \leq 2$ incognite 3

(può valere al massimo 2),

allora $\underset{\text{incognite}}{n} > \underset{\text{Rango}}{\rho}$, già $3 > 2 \Rightarrow$ infinite soluzioni,
perchè questo sistema ha
$3 - 2 = \boxed{1}$ incognita libera!

Esempio $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - 5z = 0 \\ x + 5y - z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$ sistema omogeneo di 4 equazioni e 3 incognite
$n = 3$;

Il sistema omogeneo ha sempre soluzioni, al limite solo quella nulla.
Per verificare devo scrivere la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{5R_3 - 6R_2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{5} & -7 \\ 0 & 0 & 32 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rho(A) = 3 = n \quad \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 32 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{5} & -7 \\ 0 & 0 & \boxed{32} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Allora c'è solo la soluzione nulla!!!

26/10

Osservazione sui sistemi omogenei

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

per trovare il nucleo degli elementi che formano l'applicazione lineare dobbiamo risolvere un sistema omogeneo

$A = M_f$

Il sistema che dobbiamo risolvere per trovare il nucleo della applicazione lineare è:

$$A \cdot X = 0$$

dove $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$f(x_1, \dots, x_n) = (a_{11} x_1 + \dots \quad)$

SISTEMI e NUCLEO

$$M_f = A$$

$\ker f$ = soluzioni di $AX = 0$

$\dim(\ker f) = n - \rho(M_f)$

26.11

Se $AX = B$ è un sistema lineare qualsiasi,

per risolverlo si riduce A per righe

$AX = B$ risolubile $\rightarrow \rho(A) = \rho(A|B) = \rho$

Se risolubile: ci sono $n-\rho$ incognite libere

Domande:

1. Un sistema lineare di m equazioni ed $n \geq m$ incognite ha sempre infinite soluzioni?
2. Un sistema omogeneo di m equazioni ed $m+1$ incognite ha soluzioni non nulle?
3. Il nucleo di ogni applicazione lineare è formato dalle soluzioni di un sistema omogeneo? SI

termini noti = 0

26.12

Lez. 27 Sistemi Lineari III esempi ed applicazioni

- Le controimmagini di un vettore in una applicazione lineare
- L'inversa di una matrice si calcola risolvendo un sistema lineare
- Esempi

CONTROIMMAGINI

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \qquad M_f = A$

$AX = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ dà la controimmagine $\underbrace{f^{-1}}_{}(a_1, \dots, a_m)$

NON È L'INVERSA, SI SCRIVE COSÌ

Per controimmagine si intende l'insieme dei vettori di $\mathbb{R}^n$ tali che f di tali vettori sia $a_1, \dots, a_m$

X è la colonna delle incognite $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$

$$f(x,y,z) = (x+y,\ x-z)$$

a.l.n. $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

scelto $(1,-1)$, vediamo di trovare tutti i vettori in $\mathbb{R}^3$ (x,y,z) tali che $f(x,y,z) = (1,-1)$.

$$M_f = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

matrice associata dei coefficienti all'applicazione lineare

Devo allora risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - z = -1 \end{cases}$$

$$x = z - 1$$

$$y = 2 - z$$

, c'è una incognita libera z e la soluzione più generale si può scrivere come

$$(\underbrace{z-1}_{x},\ \underbrace{2-z}_{y},\ \underbrace{z}_{z}) \text{ libera}$$

Le controimmagini del vettore $(1,-1)$ sono allora infinite e sono tutte le terne della forma sopra, con z arbitrario. Ad es. $z = 0$, trovo la terna

$$(-1,\ 2,\ 0)$$

e $f(-1,2,0) = (1,-1)$

Può capitare che di controimmagini non ce ne sia nemmeno una

21.2

Consideriamo l'applicazione lineare

$$f(x, y, z) = (2x - y, 2x - y, 0)$$
$$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

con matrice associata

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Volendo trovare una controimmagine di un vettore, per esempio della terna $(4, 4, 1)$ devo risolvere il sistema:

$$2x - y = 4$$
$$2x - y = 4$$
$$0 = 1$$

ed è evidente che questo è un sistema privo di soluzioni.

Allora la controimmagine del vettore $(4, 4, 1)$ semplicemente non esiste.

Questo ci dice che l'applicazione lineare non è suriettiva perché non tutti gli elementi di $\mathbb{R}^3$ hanno controimmagine. Qualcuno ce l'ha e qualcuno non ce l'ha. $(4, 4, 1)$ non ce l'ha.

Come si fa a priori a capire che questa applicazione lineare non è suriettiva?

Basta osservare che c'è una colonna, oppure una riga nulla.

la 1ª colonna e la 2ª e la 1ª e la 2ª riga sono dipendenti

Il rango della matrice associata A è 1: $\rho(A) = 1$, la dimensione è 3, $\rho(A) = 1 < 3$. quindi questa applicazione lineare non è né iniettiva, né suriettiva e allora è giusto che ci siano dei vettori che non hanno controimmagine.

Comunque la ricerca della controimmagine la fa facendo questo sistema lineare.

In particolare, fra le controimmagini è interessante cercare la controimmagine dello 0.

$f^{-1}(0,0,0)$ devo risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2x - y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

questo è nelle incognite x, y, z, anche se z non appare

otteniamo $y = 2x$, quindi x può essere assegnato a piacere.

z non compare e può essere assegnato a piacere.

Così x e z sono le due incognite libere.

y dipende a x.

La soluzione più generale, quindi è:

$(x, 2x, z)$ al variare di x e z.

Ci sono infinite elementi nel nucleo di questa applicazione lineare

Il nucleo coincide con la controimmagine del vettore nullo e contiene infiniti elementi, dipendenti da x e z.

Sono ∞^2 perché ricordo due incognite libere.

Una osservazione su questo esempio. UNA BASE DEL NUCLEO

Il nucleo è formato dalle terne $(x, 2x, z)$.
Che cosa capita se voglio una base del nucleo?

Due incognite libere significano dimensione 2 del nucleo

Se metto $x=1$ e $z=0$ trovo un vettore $(1,2,0)$
Se metto $x=0$ e $z=1$ trovo un altro vettore $(0,0,1)$
questi due vettori insieme formano una base del nucleo.

Quando ho in $f^{-1}(0)$ del nucleo certe incognite libere, le metto successivamente una uguale a 1, le altre uguali a 0 in tutti i modi possibili e trovo esattamente una base del nucleo.

Le controimmagini si trattano in questo modo, in particolare la controimmagine dello 0 che è il nucleo dell'applicazione lineare.

Vediamo ora la ricerca dell'inversa di una matrice.

Per definizione $A^{-1} A = A A^{-1} = I$ la matrice identica di ordine n

Abbiamo visto come scrivere delle equazioni lineari per trovare l'inverse di una matrice. Ad es. per cercare l'inverse di:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

, dobbiamo trovare a, b, c, d tali che valga l'eguaglianza.

Ovvero:
$$\begin{cases} a+b=1 \\ b+d=0 \\ 2a+3c=0 \\ 2b+3d=1 \end{cases}$$
equazioni lineari di primo grado in cui le incognite sono gli elementi della matrice inverse che stiamo cercando

Se cerchiamo l'inverse di una matrice qualsiasi 2×2 le incognite sono 4. Se la matrice è 3×3 le incognite salgono a 9 ecc. Ovvero se n è l'ordine della matrice, n^2 è il numero di incognite ed equazioni. Un modo migliore come segue.

Inversa di A:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \underset{\text{inversa x incognite}}{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

x_1, x_2, x_3 = righe di $X = A^{-1}$

Ci occorre una tecnica per ridurre il numero delle incognite e delle equazioni

Se riusciamo a prendere come incognite non i coefficienti della matrice X, ma solo un insieme di 3 righe e le incognite fossero le righe, ognuna trattata come un oggetto unico, un numero, questo ridurrebbe il calcolo, perché invece di avere 9 equazioni (in questo caso), avremmo 3 equazioni in 3 incognite. Ognuna delle incognite, questa volta, è una terna perché è una riga della matrice.

Cerchiamo di scrivere un sistema lineare in cui le incognite sono le righe.
Possiamo considerare le righe x_1, x_2 e x_3 come 3 incognite e scrivere un sistema come questo

$$
\begin{aligned}
a x_1 + b x_2 + c x_3 &= {}^{*}(1 \ 0 \ 0) \\
a' x_1 + b' x_2 + c' x_3 &= (0 \ 1 \ 0) \\
a'' x_1 + b'' x_2 + c'' x_3 &= (0 \ 0 \ 1)
\end{aligned}
$$

* questa volta, siccome abbiamo preso come incognite le righe della matrice 3x3, essa è una combinazione lineare di 3 terne, deve essere una terna, ma quale terna deve essere? Deve essere la terna del risultato, la matrice identica. Bisogna che come primo rigo sia questa la prima riga della matrice identica.

Allora quello che abbiamo scritto è un sistema lineare un po' diverso da quello ordinario in cui le incognite sono delle terne, i coefficienti sono dei numeri, e precisamente gli elementi della matrice A e la colonna dei termini noti non è più una vera colonna perché ognuno dei termini noti è una terna.

Allora abbiamo un sistema lineare associato a una matrice dei coefficienti e una matrice completa:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & 1 & 0 & 0 \\ a' & b' & c' & 0 & 1 & 0 \\ a'' & b'' & c'' & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

In questa matrice, abbiamo a sx l'insieme dei coefficienti della matrice A, cioè la matrice A, e a dx c'è la matrice identica.

Questo sistema si può risolvere, dimostrandone la validità - cosa che non faremo -, esattamente come si fa con i sistemi lineari in cui le incognite sono numeri, cioè riducendo per righe.

Alla fine si trova un sistema ridotto, le incognite sono le righe della matrice che stiamo cercando, della matrice inversa e si tratta dello stesso modo.

Si parte dall'ultima equazione, si ricava una riga incognita in funzione delle altre. Si risale alla penultima e così via.

In questo modo il calcolo dell'inversa è molto facile.

Un esempio per la determinazione della matrice inversa. Cominciamo da una matrice 2x2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad X = A^{-1}$$

↳ AMMESSO CHE ESISTA, CON 2 RIGHE E 2 COLONNE

SICCOME A è una matrice con due righe linearmente indipendenti, quindi ha rango pari a 2 è sicuramente invertibile. Questo perché è una matrice associata ad una applicazione lineare invertibile. L'INVERSA LA TROVEREMO DI SICURO.

Siano x_1 e x_2 le due righe della matrice inversa incognite e le consideriamo le incognite del sistema lineare, che avrà come matrice dei coefficienti A:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= \underset{\text{qualcosa}}{} \quad (1 \ \ 0) \\ 0x_1 + 3x_2 &= \underset{\text{qualcosa}}{} \quad (0 \ \ 1) \end{aligned}$$

LE RIGHE della matrice identica

Quindi dobbiamo risolvere un sistema di due equazioni nelle due incognite x_1 e x_2 che sono delle righe con due elementi.
Andando a risolvere abbiamo

$$x_2 = \left(0 \ \ \frac{1}{3}\right) \quad \left(\frac{1}{3} \text{ della riga 2}\right)$$

E la prima riga:

$$2x_1 = (1 \ \ 0) - \underbrace{\left(0 \ \ \frac{1}{3}\right)}_{x_2}$$

cioè $\quad x_1 = \left(\frac{1}{2} \ \ -\frac{1}{6}\right)$

E allora abbiamo trovato le due righe della matrice inversa $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Proviamo a fare una verifica, e vedere che $A A^{-1} = I$, ovvero

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{C.V.D}$$

abbiamo trovato la matrice inversa

Vediamo cosa succede nel trovare l'inversa di una matrice che non ammette inversa, usando questa tecnica:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ le equazioni del metodo sono:

$$2x_1 + x_2 = (1 \ 0)$$
$$4x_1 + 2x_2 = (0 \ 1)$$

non c'è inversa perché la riga 2 è multiplo di riga 1, $\rho(A) = 1$ quindi corrisponde ad una applicazione lineare non invertibile

Scriviamo la matrice completa e riduciamo per righe

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$\hookrightarrow 0 = \ldots$ e questa uguaglianza è falsa!

$\Rightarrow$ non c'è matrice inversa.

A questi sistemi per trovare l'inversa possiamo applicare il Teorema di Rouché - Capelli, per cui un sistema lineare ammette soluzioni se e solo se il rango della matrice dei coefficienti è uguale al rango della matrice completa, ovvero $\rho(A) = \rho(A|B)$.
Nel caso del sistema lineare che serve per trovare l'inversa di una matrice abbiamo che A è la matrice di cui cerchiamo l'inversa, la matrice completa si ottiene aggiungendo ad A la matrice identica

$(A|I)$

La matrice identica, da sola, ha tutte righe linearmente indipendenti.
Allora la matrice completa del sistema ha come rango il massimo possibile.
Quindi il sistema lineare che permette di trovare l'inversa è risolubile se e solo se anche A ha rango massimo possibile e trattandosi di una matrice quadrata di ordine n allora vuol dire che il suo rango è uguale al numero n delle righe (o delle colonne).

Esempio con matrice di ordine 3, in cui avrei 9 equazioni se uso il metodo a elementi, 3 equazioni se uso il metodo a righe visto per ultimo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si arriva direttamente a:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

questo sistema deve essere ridotto per righe, ma è già ridotto per righe

$$-x_3 = (0\ 0\ 1) \Rightarrow x_3 = (0\ 0\ -1)$$

$$\begin{cases} 2x_1 \cancel{+x_3} = (0\ 1\ 0) - \underbrace{(0\ 0\ -1)}_{x_3} \\ x_1 = (0\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}) \end{cases}$$

$$2x_2 = (1\ 0\ 0) - \underbrace{(0\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2})}_{x_1} + \underbrace{(0\ 0\ 1)}_{x_3} \Rightarrow x_2 = (\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{4}\ \tfrac{1}{4})$$

Quindi le tre righe della matrice inversa sono

$x_1 = (0\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2})$

$x_2 = (\frac{1}{2}\ -\frac{1}{4}\ \frac{1}{4})$

$x_3 = (0\ \ 0\ -1)$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ e facendo la verifica otteniamo $A\,A^{-1} = I$.

Cerchiamo ora di stabilire per quali valori di un parametro è invertibile una matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & h & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$ per quale h questo sistema ammette soluzioni.

Questo sistema ammette soluzioni se e solo se il rango della matrice A vale 2. Calcoliamo il rango della matrice A:

$$A' =_{R_2 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & -1-3h \end{pmatrix}$$

La matrice ha rango 2 se $h \neq -\frac{1}{3}$ $(-1-3h \neq 0)$ e allora la matrice è invertibile.

Per risolvere e trovare l'inversa facciamo la riduzione su tutta la matrice

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & h & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & h & 1 & 0 \\ 0 & -1-3h & -3 & 1 \end{array}\right)$$

questo è il sistema ridotto

Sia $h = -1$,

allora dalla riga $0 \; -1-3h$ ricavo $2X_2 = (-3 \;\; 1)$

e la prima equazione mi dice che $X_1 = (1 \;\; 0) + (-\frac{3}{2} \;\; \frac{1}{2})$

h la tengo

Quindi i sistemi lineari servono per

. trovare l'inversa di una matrice

. la controimmagine

. $\ker f$ ($f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$M_f = A$

$AX = 0$ e trovo $\ker f$)

Domande:

1. Sia $f: \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$ allora ogni vettore di $\mathbb{R}$ ha almeno una controimmagine?
2. Una matrice quadrata di ordine n e di rango n è invertibile? SI
3. Una matrice quadrata di ordine n e rango $p < n$ non è invertibile? sì

LEZ. 28
42'12"

Il Determinante di una matrice quadrata

- I determinanti: definizioni e proprietà
- Come si calcolano i determinanti
- Matrici invertibili e determinante.
  ↳ per calcolare l'inversa di una matrice

IL DETERMINANTE DI UNA MATRICE QUADRATA 2x2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

diagonale secondaria ↳ diagonale principale

IL DETERMINANTE DI UNA MATRICE E' UN NUMERO REALE CHE SI CALCOLA A PARTIRE DAI COEFFICIENTI DELLA MATRICE

Il determinante di una matrice ha per simbol

$|A|$ oppure $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, le parentesi diventano sbarre,

oppure $\det A$

$$\det A = \underbrace{a_{11} \cdot a_{22}}_{\text{elementi della diagonale principale}} - \underbrace{a_{12} \cdot a_{21}}_{\text{elementi della diagonale secondaria}}$$

ad es.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-2) - 3 \cdot 5 = -2 - 15 = -17$$

IL DETERMINANTE DI UNA MATRICE QUADRATA 3×3

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

riga col

Metodo: isoliamo $\boxed{a_{11}}$ e "cancelliamo" l'intera riga e l'intera colonna di cui questo elemento fa parte, ottieniamo una specie di complemento di questo elemento dentro la matrice.
Abbiamo una sottomatrice 2×2, che chiameremo matrice complementare di questo elemento. La matrice complementare è 2×2 quindi ha un determinante.
Moltiplichiamo a_{11} per il determinante della matrice complementare

Riga 1
Col 1

$$\det A = +a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Poi facciamo lo stesso così con l'elemento a_{12} di A. Fra le 2 espressioni metto il segno −, vedremo perché.
E poi lo stesso con a_{13}, con segno +.

Regola di assegnamento del segno ↓

Regola per assegnare il segno:

cancellando la Riga 1	e la Colonna 1 :	segno +	(1+1=2 pari)
1	2	−	(1+2=3 dispari)
1	3	+	(1+3=4 pari)

Questo è il determinante della matrice 3×3 A.

Fino a qui il calcolo è fattibile. Lo diventa meno aumentando il numero di righe e colonne.

DETERMINANTE DI UNA MATRICE QUADRATA DI ORDINE n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Definiamo il complemento algebrico di ogni elemento di A il determinante della matrice che si ottiene cancellando la riga e la colonna che si incrociano in quell'elemento con un determinato segno

Consideriamo a_{21}, la sottomatrice è:

$$A' = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{1n} \\ a_{32} & a_{3n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

con una riga ed una colonna in meno della matrice di partenza.

$\Downarrow$

complemento algebrico di a_{21} =

$\boxed{-\det A'}$

$\downarrow$

per la regola di assegnamento del segno

Questa sottomatrice ha un determinante e, munito di un segno ~~algebrico~~ è il complemento algebrico di a_{21}. Il segno è + se la somma riga e colonna dell'elemento è pari; il segno è − se la somma tra riga e colonna dell'elemento è dispari. In questo caso il segno è −

Esempio di complemento algebrico

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ \cancel{2} & \cancel{2} & \boxed{0} & \cancel{1} \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{- \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}_{\text{determinante di una matrice } 3\times 3}}$$

complemento algebrico, col segno −

Quindi conosciamo il determinante delle matrici

2×2 (quello delle matrice 1×1 è l'elemento stesso: $\det|a| = a$)

3×3

Per una matrice 4×4 A del tipo $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = A$

Quello di una matrice 4×4 è così definito:

prendo gli elementi di una riga della matrice 4×4, per es. la riga 1 a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} e ciascuno di questi elementi lo moltiplichiamo per il suo complemento algebrico, che sarà un determinante 3×3, quindi avremo 4 determinanti 3×3

A_{11} A_{12} A_{13} A_{14}, con un suo segno

complemento algebrico di a_{11}, di a_{12} di a_{13} di a_{14}

Quindi abbiamo che il $\det A$, una matrice 4×4, è:

con un suo segno

$$a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13} + a_{14} A_{14}$$

Avremmo anche potuto scegliere una colonna, invece della riga.

Prendendo gli elementi della prima colonna: (ma potrei prendere una qualsiasi colonna)

$$a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}\boxed{A_{41}}$$ questo è sempre il $\det A$.

con un suo segno — è un determinante 3x3

elementi della 1ª colonna

Quindi abbiamo definito il determinante delle matrici 4 x 4.

Con la stessa regola è definibile il determinante delle matrici 5 x 5 e così via.

Per calcolare il determinante di una matrice qualsiasi si enuncia la

REGOLA DI LAPLACE

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} =$$

matrice quadrata

$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$$

Cioè: il determinante di A si ottiene moltiplicando gli elementi di una riga (ovvero di una colonna) per i loro complementi algebrici e facendo la somma dei risultati.

Ad. es.

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

2° Riga

$$-(-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = 2$$ ← il determinante di questa matrice 3 x 3 secondo la regola di Laplace

~~Con questa regola matrici di ordine~~

Con questa regola di Laplace, sarebbe un po' complesso calcolare il determinante di matrici 4x4 o 5x5 ecc, a meno che non ci siano molti zeri.

La regola funziona sempre, ma non è la migliore.

LE PROPRIETÀ DEI DETERMINANTI

Se c'è una riga nulla in una matrice $A \Rightarrow \det A = 0$

Se ci sono due righe uguali, $R_i = R_j \Rightarrow \det A = 0$
(o due colonne uguali)

$$\underset{\text{numero}}{a} \; \underset{\text{matrice}}{\hat{A}} \Rightarrow \text{ogni elemento per } a^n \det A$$

moltiplicazione di una sola riga: $(a\, a_{11}, \ldots) \quad a \det A$ il determinante di A è moltiplicato solo per a

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11}, & \ldots & a_{1n}+b_{1n} \end{pmatrix}$$

se in una matrice A, una riga è la somma di un elemento riga, in questo caso la:

il $\det A$ è la matrice che si ottiene così:

$$\det \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \end{vmatrix} + \det \begin{vmatrix} b_{11}, & \ldots & b_{1n} \\ & \vdots & \end{vmatrix}$$

Queste sono proprietà fondamentali per calcolare il determinante di una matrice.

A partire da queste proprietà si può far vedere che se A è una matrice quadrata di ordine n, e se noi applichiamo alle righe o alle colonne della matrice A

le trasformazioni elementari, il determinante della matrice cambia di poco, a volte non cambia affatto, a volte cambia solo per il segno

Se scambiamo fra loro due righe, che è una trasformazione elementare, la nuova matrice A' ha come determinante l'opposto di quello della matrice A:

$$R_i \leftrightarrow R_j \Rightarrow |A'| = -|A|$$

Se ad una matrice, ad una riga moltiplichiamo un numero $\neq 0$, il determinante della matrice risultante A' è uguale al determinante della matrice A moltiplicato per quel numero

$$A \to A' \quad R_i \to aR_i \Rightarrow \det|A'| = a \cdot \det|A|$$

Se ad una riga ne sostituiamo una con somma con un multiplo di un'altra riga, il determinante della matrice non cambia

$$R_i \to R_i + aR_j \Rightarrow \det|A| = \det|A'|$$

Questo ci è utile in quanto, conoscendo come cambia il determinante dopo una trasformazione elementare, posso far comparire molti zero nella matrice dopo una trasformazione

Vediamo allora un esempio con una matrice 4x4:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ -1 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

uso questa riga per determinare il determinante con la regola di Laplace, perché ci sono già 3 zeri

$$|A| = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

Invece di usare la regola di Laplace, già usata bene con una riga con molti 0, continuiamo ad introdurre degli 0. Il che produce un calcolo più semplice. Vogliamo uno zero su una riga o colonna dove già compare 0 1 cioè sulla 2ª riga.

Al posto della prima colonna metto la 1ª colonna $-\frac{1}{2}$ della 3ª.

$$= -1 \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -\frac{3}{2} & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

invariante

così facendo il determinante rimane invariato.

per la posizione del "2"

$$= \underset{\text{sviluppando per la seconda riga}}{} \; -1 \cdot 2 \cdot (-1) \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{vmatrix} = 2\left(1 + \frac{3}{2}\right) = 5$$

determinante di A!

Questa è la regola pratica più comoda (32'00'')

28.8

Far comparire degli zero, ricordandosi delle regole del segno. Ad esempio scambiando le righe il segno cambia

Esercizio

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

in questa matrice faccio comparire 0 nella terza colonna, al posto dei 2 e sviluppo secondo gli elementi della terza colonna.

PROPRIETÀ DI INVERTIBILITÀ DI UNA MATRICE

A invertibile

$$\det A = \begin{cases} 0 & \text{non è invertibile} \\ \neq 0 & \text{è invertibile} \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ $|A| = -1-6 = -7$ A è invertibile

$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ $|B| = 0$ B non è invertibile

Siccome le matrici invertibili sono quelle che hanno il rango massimo possibile allora chiaro che il determinante di A è ≠ 0 è come dire che A è invertibile e che il rango di A è il numero delle righe o colonne

$$\det A \neq 0$$

A invertibile

$\rho(A) = n$ (l'ordine della matrice)

CALCOLO DELL'INVERSA USANDO I DETERMINANTI

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{21} & \dots & \hat{A}_{n1} \\ \hat{A}_{12} & & & \\ \hat{A}_{1n} & & & \hat{A}_{nn} \end{pmatrix}$$

la matrice che si ottiene sostituendo al posto della matrice A, i complementi algebrici degli elementi della matrice A, dopo aver scambiato le righe con le colonne

Ad es. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ $|A| = 5+3 = 8 \neq 0$

$\Rightarrow A$ invertibile

$$A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & -\frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$\hat{A}_{11} = 5$

il complemento algebrico di -1

$\hat{A}_{12} = 1$

$\hat{A}_{21} = -3$

$\hat{A}_{22} = 1$

CASO PARTICOLARE DI MATRICE INVERTIBILE

Una matrice A quadrata di ordine n si dice ortogonale se la trasposta di A è uguale all'inversa

$$ {}^tA = A^{-1} $$

Le matrici ortogonali sono invertibili.
Se A è ortogonale

$$ \det A = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases} $$

MATRICI ORTOGONALI

$$ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{pmatrix} $$

MATRICE quadrata P ortogonale ${}^tP\,P = 1 \iff P^{-1} = {}^tP$

$$ \det P = \pm 1 \text{; se } \det P = 1, \ P \text{ speciale} $$

Un matrice speciale, usata nella geometria analitica piana, che ha a che fare con le rotazioni del piano

$$ P = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a^2 & \cos a \end{pmatrix} \quad \det P = 1 $$

è ortogonale speciale.

Scambiando le righe o le colonne il determinante vale −1, scambiando le righe 1 e 2 ~~...~~ il determinante è invariato, vale 1

28.12

Riepilogando la lezione:

REGOLA DI LAPLACE

$$\det A = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in} =$$

$$= a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \dots + a_{nj} A_{nj}$$

A è invertibile se e soltanto se $\det A \neq 0$; $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

Se $\det A \neq 0$, $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{n1} \\ A_{1n} & A_{nn} \end{pmatrix}$

i complementi algebrici dopo aver scambiato le righe con le colonne

$\det(AB) = \det A \cdot \det B$

Domande

1. Se $\det A = -1$, allora A è invertibile? SI
2. Se $\det(AB) = 1$ allora A e B sono l'una l'inversa dell'altra? NO
3. Se A è quadrata di ordine n e rango p, allora $\det A = 0$ se e solo se $p < n$?

Lezione 29: LA REGOLA DI CRAMER

- LA REGOLA PER RISOLVERE I SISTEMI LINEARI CON UNA SOLA SOLUZIONE
- ESEMPI PRATICI DI RISOLUZIONE MEDIANTE LA REGOLA DI CRAMER
- LA REGOLA DI CRAMER QUANDO CI SONO INFINITE SOLUZIONI (quando ci sono incognite libere)

È una regola basata fortemente sull'uso dei determinanti.

Abbiamo un sistema lineare $AX = B$

matrice dei coefficienti — colonna delle incognite — colonna dei termini noti

e supponiamo che sia risolubile $\Rightarrow \rho(A) = \rho(\underbrace{A|B}_{\text{matrice completa}})$

Sotto queste condizioni, se il sistema ha m equazioni e n incognite, il sistema ha una ed una sola soluzione quando $n - \rho(A) = 0$.

Quindi

$$1 \text{ sola soluzione} \iff \underset{\text{n incognite}}{n} - \rho(A) = 0$$

ovvero il rango della matrice A deve essere uguale al numero delle incognite.

Questo in pratica significa che, pur potendo essere m le equazioni un numero qualsiasi, le equazioni effettivamente indipendenti l'una dall'altra sono n, tanto quanto il rango e le incognite, le righe della matrice A e A|B indipendenti

Ci interessa che le equazioni non linearmente indipendenti siano scartate e quindi che $\rho(A)=m$.
Quindi, con queste ipotesi $m=n$ e quindi avremo a che fare con sistemi quadrati.

Sistemi con n equazioni ed n incognite, la prima condizione di applicazione della regola di Cramer.

Con $\rho(A)=n$ allora siamo sicuri che il sistema ha 1 sola soluzione.

Vediamo un esempio con una matrice di ordine 2×2.

$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$, da cui il sistema

$$\begin{cases} 2x+y=0 \\ x+3y=1 \end{cases}$$

e vogliamo risolverlo in un modo diverso dalla riduzione.

In forma matriciale il sistema si scrive

$AX=B$

LA MATRICE A E' UNA MATRICE QUADRATA DI ORDINE 2 E RANGO 2
IL DETERMINANTE DI A è:

$\det A = 6-1 = 5 \neq 0 \Rightarrow \rho(A)=2$, rango massimo e A è invertibile

A è invertibile: condizione necessaria per la regola di Cramer.

$AX = B$ è una eguaglianza tra matrici.

A è invertibile : $\exists A^{-1}$

Moltiplicando l'eguaglianza per A^{-1} troviamo:

$$\underbrace{A^{-1}(AX)}_{I} = A^{-1}B \quad \text{che diventa:}$$

$$\underbrace{IX}_{X} = A^{-1}B \quad \text{che diventa}$$

$$X = A^{-1}B$$

Quindi per trovare questa soluzione, la prima cosa è scrivere la matrice inversa e poi fare il prodotto con la matrice B.

Vediamo come funziona questo calcolo.

La matrice inversa la troviamo con la regola dei complementi algebrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

compl. complementi algebrici compl. da

c.a. di 2

1

1

3

Ora devo calcolare $A^{-1} \cdot B$, ovvero

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = -\frac{1}{5} \\ y = \frac{2}{5} \end{matrix}$$

C'è da osservare che il prodotto

$$A^{-1} \cdot B$$

si può esprimere non come un prodotto di matrici ma come qualcosa che ... e che fare in modo più chiaro e semplice con i determinanti.

La soluzione x e y può essere presentata in modo lineare, ossia la x e la y possono essere presentate in modo diverso, ricordandosi che $X = A^{-1} \cdot B$. SCRIVIAMO UNA NUOVA MATRICE.

La scrittura è: per la matrice A scriviamo 13'20"

. al posto della prima colonna scriviamo la colonna dei termini noti

. la seconda colonna è la seconda colonna di A

e calcoliamone il determinante e dividiamo per il determinante

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} & \\ \text{colonna dei termini noti} & \text{colonna n. 2 di A} \end{array} \rightarrow \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{\underset{\det A}{5}} = -\frac{1}{5}$$ che è equivalente a x

Se facciamo la stessa cosa, però la prima colonna la lasciamo uguale e la seconda colonna la sostituiamo con la colonna dei termini noti

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \\ \text{colonna n. 1 di A} & \text{colonna dei termini noti} \end{array} \rightarrow \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\underset{\det A}{5}} = \frac{2}{5}$$ che è equivalente a y

Ricapitolando abbiamo:

. una matrice A e una matrice B che rappresentano un sistema lineare, di cui vogliamo calcolare le incognite, se esistono.

La matrice A è di ordine 2×2.

La soluzione è data da un metodo diverso.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ il sistema è $\begin{matrix} 2x + y = 0 \\ x + 3y = 1 \end{matrix}$

Il sistema in forma matriciale è $AX = B$.

con A matrice quadrata di ordine 2×2 e rango 2.

Poiché $\det(A) = 6 - 1 = 5 \neq 0 \Rightarrow \rho(A) = 2$

e rango massimo, A è invertibile posso applicare la regola di Cramer)

Le soluzioni sono date dalla seguente procedura

$$x = \frac{\left| \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{colonna dei termini noti}} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}}^{\text{colonna 2 di A}} \right|}{\underbrace{\boxed{5}}_{\det A}} = -\frac{1}{5}$$

$$y = \frac{\left| \overbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}}^{\text{colonna 1 di A}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{colonna dei termini noti}} \right|}{\underbrace{\boxed{5}}_{\det A}} = \frac{2}{5}$$

Come teoria generale possiamo dire che si può ricavare l'unica soluzione di un sistema lineare che ha una sola soluzione, un sistema quadrato con la matrice che ha determinante non nullo, ricavandone ogni incognita con certi determinanti che si costruiscono in modo abbastanza semplice. Dal 2×2 passiamo al generale

REGOLA DI CRAMER

matrice A quadrata invertibile, $AX = B$ ammette l'unica soluzione

è un sistema lineare di n equazioni in n incognite

perché A è invertibile le incognite sono n e non ci sono incognite libere

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

colonna dei termini noti

complementi algebrici degli elementi della matrice A, dopo aver scambiato le righe con le colonne

Le incognite si possono ottenere in modo più esplicito

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{|\quad|}{\det A} \\ \dots \\ \dfrac{|\quad|}{\det A} \end{pmatrix} \begin{matrix} \} x_1 \\ \\ \} x_n \end{matrix}$$

matrice A con la sostituzione di una colonna, con quella dei termini noti; per la prima incognita, la prima colonna, per la seconda incognita, la seconda colonna ecc

ovvero

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & \dots \\ \dots & \\ b_n & \dots \end{vmatrix}}{\det A}$$

colonna 1 di A

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} \cdot & b_1 & \dots \\ \vdots & \dots & \\ \cdot & b_n & \dots \end{vmatrix}}{\det A}$$

colonna 2 di A

ecc

Per cui, se so che il sistema ammette una sola soluzione, perché il determinante della matrice associata è diverso da 0, allora posso scrivere direttamente la soluzione con questa regola

Esempio: $AX = B$

con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Questo è un sistema con tre incognite x, y e z, tre equazioni non omogenee.
La matrice A è ridotta per righe
$\rho(A) = 3 = \rho(A|B)$ => il rango e il numero di incognite sono uguali, quindi c'è una e una sola soluzione.

La soluzione è:

$$X = A^{-1} B$$

Senza calcolare direttamente l'inversa di A e poi la moltiplico con B, posso scrivere direttamente la soluzione, saltando questo passaggio.
Le incognite le posso scrivere direttamente come determinante di certe matrici, diviso il determinante di A.
Calcoliamo subito il determinante di A, secondo gli elementi della terza riga oppure della prima colonna, perché ci sono molti 0.

$$\det A = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 = 12$$

(scelta la 3ª riga)

Quindi posso calcolare direttamente x, y e z:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{12} = \frac{3 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}{12} = \frac{3 \cdot -2}{12} = -\frac{1}{2} \quad x$$

scelto di sviluppare il complemento degli elementi

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{12} = \frac{1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \quad y$$

unica soluzione

sviluppiamo secondo gli elementi della 1ª colonna

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{12} = \frac{0}{12} = 0 \quad z$$

sviluppiamo cfr. z secondo gli elementi della 3ª riga

Esempio, ma con il sistema non sia quadrato

Quindi non ci sarà una unica soluzione, ma le cose si aggiustano lo stesso.

A, come matrice dei coefficienti è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sistema con 3 incognite e 2 equazioni.

$\rho(A) = 2$ e il sistema è risolubile, le incognite sono 3,

$3 - 2 = 1 \Rightarrow 1$ incognita libera, quindi non è un sistema con una sola soluzione

Avrà infinite soluzioni, formalmente ∞^1 soluzioni, dipendenti da una incognita libera

Risolviamo il sistema utilizzando comunque la regola di Cramer.

La prima cosa da fare è individuare l'incognita libera.

Quale delle tre incognite x, y, z può essere scelta come incognita libera.

Non è possibile prenderne una a caso.

Allora individuiamo nella matrice A una sottomatrice formata con due sole colonne e due righe,

cancelliamo una colonna in modo tale che la matrice che otteniamo abbia rango massimo possibile.

È evidente che questo si può ottenere cancellando la colonna 3 e ottengo la matrice A' così definita

$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ questa è una sottomatrice ottenuta da A, cancellando una colonna e che sia di rango massimo. In questo caso z la colonna cancellata è la terza, quindi z diventa incognita libera

$\det A = 1-6 = -5 \neq 0 \Rightarrow A'$ è invertibile

Allora scriviamo il sistema in quest'altro modo, con la matrice dei coefficienti uguale ad A', matrice dei termini noti spostando la z nei termini noti.

Scrivendo le equazioni e applicando questo concetto, otteniamo:

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases} \to \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x + y = z + 2 \end{cases}$$

sarà la nuova colonna dei termini noti!

Quindi avremo:

$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$B' = \begin{pmatrix} 0 \\ z+2 \end{pmatrix}$ possiamo considerare z, a cui assegniamo un valore a piacere, in campo reale ($\mathbb{R}$), un termine noto, non un numero, ma una variabile

Il nostro nuovo sistema, scritto come

$A'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B'$ è un sistema di due equazioni in due incognite, in cui il termine noto dipende da una terza incognita, quella libera, che si risolve con la regola di Cramer

termine noto
al posto colonna 1 di A'

colonna 2 di A'

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ z+2 & 1 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-2z-4}{-5} = \frac{2z+4}{5}$$

$\det A'$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & z+2 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{z+2}{-5} = -\frac{z+2}{5}$$

Questo è un sistema con soluzioni dipendenti dal valore assegnato a z.

In generale cosa si può fare con sistemi che non abbiano una e una sola soluzione?

Si deve determinare se il sistema è risolubile o no
la condizione per quello è:

$$AX = B \Rightarrow \rho(A) = \rho(A|B)$$

Poi abbiamo che il numero di incognite libere è pari al ~~rapporto~~ numero di incognite meno il rango della matrice A

numero incognite libere = numero incognite $- \rho(A)$

Quali incognite possono essere scelte come incognite libere?

Cerco di vedere se tra le matrici che si ottengono dalla matrice A cancellando delle colonne, ce n'è una quadrata che sia di rango massimo.

Concretamente questo si traduce in:

l'incognita in questa colonna diventa libera e va nella colonna dei termini noti

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \to A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} \\ & & \\ a_{m1} & \dots & a_{m,n-1} \end{pmatrix} \text{ e } B' = \begin{pmatrix} b_1 & -a_{1n} \\ \vdots & \dots \\ b_m & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

diventa A', deve avere rango massimo!

Noi sappiamo che ha rango $\rho(A) = \rho(A|B)$.

Allora questo vuol dire che non tutte le equazioni saranno linearmente indipendenti, qualcuna sarà dipendente dalle precedenti, semplicemente le cancelliamo.

Allora diciamo che $\rho(A) = m$ dopo aver cancellato equazioni superflue.

A questo punto sono tutte indipendenti le equazioni.

Andiamo allora a vedere se cancellando alcune colonne resta una matrice quadrata con m righe e m colonne che abbia rango massimo, ovvero determinante $\neq 0$.

Le incognite che non appartengono a questo gruppo di colonne le portiamo al secondo membro e diventano termini noti, non precisati, ovvero delle incognite libere assegnabili a piacere.

Si ricordi che ogni colonna di A è il coefficiente di una incognita, ~~[illegible]~~ ovvero $a_{11} \dots a_{m1}$ sono i coefficienti della prima incognita, x ecc.

Sulla sottomatrice ottenuta e la nuova matrice dei coefficienti posso applicare la regola di Cramer per ottenere le soluzioni, in funzione

23.11

delle incognite libere.
Si risolve con la regola di Cramer applicata alla nuova matrice ottenuta come sottomatrice di A e la nuova matrice dei termini noti.

La nuova matrice A' con alcune colonne in meno.
La nuova matrice B' dei termini noti con alcune colonne in più.

Ad es:

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y-z-t=0 \\ 2x+y=0 \end{cases}$$

un sistema omogeneo di 3 equazioni e 4 incognite. ↳ perché i termini noti sono 0

La matrice dei coefficienti è:

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

e calcoliamo il rango per riduzione

$$\xrightarrow{R_2 \leftarrow R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \leftrightarrow R_3]{\text{scambio}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \boxed{1} \\ 2 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ \boxed{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elementi speciali

Quindi il rango di questa matrice è 3.

$\rho(A) = 3$; numero incognite 4 ⇒ 4 − 3 = 1 abbiamo una incognita libera

Per determinare quale è l'incognita libera utilizzo in modo opportuno le righe oppure le colonne di A cercando una matrice 3×3 ~~sca~~ con determinante diverso da 0.

La cosa più semplice da fare in questo esempio è provare a vedere con il determinante della matrice che si ottiene prendendo le prime 3 colonne di A:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

notare che questa matrice ha la seconda riga uguale alla prima (o proporzionale), per ragioni generali, allora il determinante $\emptyset$

$$\det A' = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - (-1-1) = 2$$

sviluppando secondo gli elementi della 3ª riga

Questo vuol dire che, avendo cancellato la quarta colonna, t può essere scelto come incognita libera.

Il sistema può essere riscritto come

$$\begin{aligned} x + y + z &= -t \\ x - y - z &= t \\ 2x + y &= 0 \end{aligned}$$

è un sistema non omogeneo perché i termini noti sono $\neq 0$, se e solo se $t \neq 0$.

Questo sistema può essere risolto con la regola di Cramer, trovando x, y e z in funzione di t.

Per esercizio si potrebbe vedere che succede scegliendo altre colonne da togliere

23.13

invece della quarta colonna.
Ovvero se x, y o z possono essere scelte come ~~categor~~ incognite libere oppure no.

Domande:

1. Un S. L. di m equazioni ed m incognite si può sempre risolvere con la regola di Cramer? Sì, se A è invertibile. A matrice dei coeff.

2. Se un sistema omogeneo di m equazioni ed m incognite ha solo la soluzione nulla, allora si può risolvere con la regola di Cramer? NO, det A = 0.
(determinante = 0)

3. Se la matrice di coefficienti di un sistema è ortogonale, si può risolvere il sistema usando la regola di Cramer? Sì, perché è invertibile.
A matrice invertibile, la cui trasposta (ottenuta scambiando le righe con le colonne) coincide con la matrice inversa, quindi dà I come prodotto, la matrice identica

N. B. Nella regola di Cramer $\boxed{\det A}$ è un denominatore, quindi deve essere $\neq 0$
(matrice dei coefficienti)

a → numeratore
b → denominatore

LEZ. 30: I NUMERI COMPLESSI I

- Che cosa sono i numeri complessi
- Calcoli con i numeri complessi
- Spazi vettoriali reali e complessi

Abbiamo visto le equazioni lineari.
Occupiamoci delle equazioni non lineari, per esempio quadratiche

$$ax^2+bx+c=0 \quad \text{con } a,b,c \in \mathbb{R}$$
$$\text{e } a \neq 0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{e } b^2-4ac \text{ è sotto radice}$$
quantità che può non esistere

$$3x^2+10=0$$
b^2-4ac in questo caso vale $-120<0$ e la radice di un numero negativo non c'è

Anche $x^2+1=0$
ovvero $x^2=-1$

Il quadrato di un qualunque numero reale è maggiore o 0, ma non negativo.
Allora, in campo reale, non possiamo risolvere delle equazioni di secondo grado, o superiori, ad es. $x^4+20=0$.

La radice quadrata più semplice è $\sqrt{-1}$, che in campo reale non esiste.

Mancando la radice quadrata di -1 ne introduciamo un simbolo che è la radice quadrata di -1.

I NUMERI COMPLESSI

sono oggetti su cui operiamo in un certo modo

Sono le espressioni formali del tipo $a+ib$, dove a e b sono numeri reali e i è tale che $i^2 = -1$

si scrive anche $a+bi$

$a + i0$ = numeri reali

$0 + ib$ = immaginari puri

$a+ib \to a-ib$ = complesso coniugato di $a+ib$, di un certo interesse.

La somma:

$$\begin{array}{l} a+ib + \\ \underline{a'+ib' =} \\ (a+a')+i(b+b') \end{array}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$

La somma gode delle stesse proprietà dei numeri reali, esiste lo 0, che è $0+i0$ e l'opposto che è $-a-ib$

Il prodotto

$(a+ib)(a'+ib') =$

$= a\cdot a' + (ib)(ib') + iba' + ib'a =$

$= (a\cdot a' - bb') + i(ba' + ab')$

Il prodotto ha le stesse proprietà del prodotto fra numeri reali.

$1 + i\cdot 0$ è l'elemento neutro

E con la moltiplicazione così definita, abbiamo $i^2 = -1$, dato dalla moltiplicazione:

$(0+i1)(0+i1) = -1$

i è detta anche unità immaginaria.

Nella forma $a + ib$

a è detta parte reale del numero complesso

e b è detto il coefficiente dell'immaginario,

$i \cdot b$ è detta parte immaginaria.

Il complesso coniugato del numero complesso $a + ib$ è $a - ib$ e, dato $z = a + ib$, il complesso coniugato $a - ib$ è scritto come $\bar{z} = a - ib$. (z segnato)

Si noti che:

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$$

, che è un numero reale, detto quadrato del modulo di z.

$$\boxed{\text{modulo di } z} = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Se $z = 0$ allora a e b sono nulli e il modulo è nullo.

Se $z \neq 0$ allora $|z| = |\bar{z}| \neq 0$

a o $b \neq 0$

Se $r \in \mathbb{R}$ con $r \neq 0$ $\exists\, r^{-1} = \frac{1}{r}$ che si chiama inverso o reciproco di r e gode della proprietà:

$$r \cdot \frac{1}{r} = 1$$

Per i numeri complessi esiste un reciproco?

Supponiamo che z sia un numero complesso $\neq 0$

$z \neq 0 \qquad z = a + ib$

$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{a}{(a^2+b^2)} - i\,\frac{b}{(a^2+b^2)}}$$ (e non $\frac{1}{a+ib}$!!!)

→ L'INVERSO DI UN NUMERO COMPLESSO

Verifichiamo questa uguaglianza provando a moltiplicare $a+ib$ per il numero visto:

$$\underbrace{(a+ib)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2} - i\,\frac{b}{a^2+b^2}\right)}_{\text{espressione fra numeri reali ammesse}} = \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$$

Ad es. $z = \overset{a}{1} + \overset{b}{2}i$ e voglio trovare l'inverso di z. Osserviamo che $z \neq 0$.

$$|z| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

il complesso coniugato di z

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i = \frac{1-2i}{5}$$ → il quadrato del modulo.

ovvero $$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}}$$

N.B.: $$\left.\begin{array}{l} i^3 = -i \\ i^4 = \underset{-i \cdot 1}{\underset{i}{1}} \end{array}\right\} \quad i^n \begin{cases} -i \text{ per } n \text{ dispari} > 2 \\ 1 \text{ per } n \text{ pari} > 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{i} = \frac{-i}{\underset{|i|^2}{1}} = \frac{-i}{1} = -i$$

Il quoziente di numeri complessi.

$$\frac{2+i}{i} = (2+i)\cdot\frac{1}{i} = (2+i)\cdot -i = 1-2i$$

$\frac{i}{2+i}$ lasciato come esercizio

$\frac{i}{(2+i)^3}$ lasciato come esercizio

Partendo da $x^2+1=0$ abbiamo introdotto i numeri complessi.

La soluzione $x^2+1=0$ è $x=i$ e $x=-i$

Ma abbiamo risolto anche equazioni di secondo grado più generali

$$ax^2+bx+c=0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

se $b^2-4ac<0$, allora, detto $\Delta = b^2-4ac$,

se $\Delta = -20$ abbiamo $\pm\sqrt{-20} = \pm i\sqrt{20} = \pm\sqrt{-1}\cdot\sqrt{20}$

e quindi abbiamo soluzioni in campo complesso.

Allora possiamo immaginare equazioni di secondo grado in cui a, b e c sono numeri complessi, ad es.:

$$x^2 + 2i x + 5 = 0$$

La risoluzione è come quella reale solo che in questo caso si spera che la soluzione ci sarà sempre. Essa è:

$$x = \frac{-2i \pm \sqrt{-4-20}}{2} = \frac{-2i \pm \sqrt{-24}}{2} =$$

$$\frac{-2i \pm i\sqrt{24}}{2} = -i \pm i\frac{\sqrt{24}}{2} = i\left(-1 \pm \frac{\sqrt{24}}{2}\right) \quad 30'$$

Però se sotto la radice c'è un numero **non** reale, vedremo come risolvere, perché ci sono "grossi" problemi, perché la $\sqrt{i}$ cosa è? È un nuovo problema: c'è un numero che elevato al quadrato mi dà i? Non è molto evidente che questo numero esiste. Ma riusciremo a trovare $\sqrt{a+ib}$, nella prossima lezione.

SPAZI VETTORIALI REALI e COMPLESSI

Avevamo introdotto il concetto di V = spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ o reale. Ma non si potrebbe usare questo concetto ed avere V = spazio vettoriale su $\mathbb{C}$?

Se considero $\mathbb{C}^2 = (\ z_1\ ,\ z_2\ )$, l'insieme delle coppie di numeri complessi.

La somma di coppie di numeri reali: $\mathbb{C}^2 = (z_1, z_2)$

$$\frac{\begin{matrix}(z_1, z_2)\\(z_1', z_2')\end{matrix}}{(z_1+z_1', z_2+z_2')}$$

Il prodotto per uno scalare $\alpha(z_1, z_2) = (\alpha z_1, \alpha z_2)$

Non è difficile dimostrare che, accettando la moltiplicazione fra numeri complessi, si può definire lo spazio vettoriale complesso, con le stesse 8 proprietà viste per gli spazi vettoriali reali.

Per essere più preciso $\mathbb{C}$ è l'insieme o campo complesso, V è uno spazio vettoriale sui complessi se ha una somma con le proprietà della somma e un prodotto per numeri complessi.
Allora $\mathbb{C}, \mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3, \dots, \mathbb{C}^n$ sono esempi notevoli, di spazi vettoriali complessi, esattamente come $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \dots, \mathbb{R}^n$.

Su questi spazi vettoriali complessi si può fare una trattazione analoga a quella fatta per gli spazi vettoriali reali.

Si può definire cosa sono i generatori, si può dire cosa è una base, l'indipendenza, la dimensione.

Per esempio, su $\mathbb{C}^2$ una base sarà formata dalle coppie $(1,0)$ e $(0,1)$, cioè ogni coppia di numeri complessi si potrà scrivere in questo modo.

Come si scrive la coppia di complessi (z, z') come combinazione lineare di $(1,0)$ e $(0,1)$?
Sarà $z(1,0) + z'(0,1)$ che saranno linearmente indipendenti

Si possono definire e costruire le matrici a elementi complessi per studiare le basi e le dimensioni degli spazi vettoriali complessi. Per vedere se certi vettori sono linearmente indipendenti o no nel campo complesso.

Ad esempio voglio sapere se i vettori $A = \begin{pmatrix} \boxed{i} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{i} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix}$ che sono 3 terne, elementi di $\mathbb{C}^3$ sono linearmente indipendenti in $\mathbb{C}^3$. Farò come solito, riduco la matrice per righe. Essa è già ridotta per righe, per cui il rango della matrice è 3. $\rho(A) = 3$
Quindi i 3 vettori di $\mathbb{C}^3$ sono linearmente indipendenti.

Allora $\mathbb{C}^3$, come $\mathbb{R}^3$ avrà dimensione 3, questi vettori saranno una base di $\mathbb{C}^3$.

Quello che si è detto era detto sul campo reale si estende al campo complesso, con una piccola ulteriore difficoltà.

Supponiamo di avere V $\mathbb{C}$ - spazio vettoriale, ad esempio prendiamo $\mathbb{C}^2$.
E' possibile definire in $\mathbb{C}^2$ oltre alla somma di coppie di numeri complessi, definire una moltiplicazione per coppie dove α è reale:

$\alpha(z, z')$, cioè limitarsi ai numeri reali che moltiplicano le coppie.
$\underset{\text{reale}}{\downarrow}$

In questo caso considero $\mathbb{C}^2$ come spazio vettoriale sopra i reali.

Allora $\mathbb{C}^2$ ha una doppia natura, e questo vale in generale per tutti gli spazi vettoriali complessi, cioè spazio vettoriale complesso e spazio vettoriale reale.

Non è vero il contrario, cioè per coppie di numeri reali ($\mathbb{R}^2$) non ha senso moltiplicarle per numeri complessi, perché non ottengo una coppia di numeri reali: (x, y) moltiplicato per i è $(ix, iy) \notin \mathbb{R}^2$.
Mentre se moltiplico una coppia di numeri complessi per un reale ottengo una coppia di numeri complessi.
Ad. es. $3 \cdot (i, 2i) = (3i, 6i)$.

Dunque $\mathbb{C}^2$ ha anche la natura di spazio vettoriale reale. Come ogni V spazio complesso.

Però c'è da notare che se $\mathbb{C}^2$ ha dimensione 2 su $\mathbb{C}$, su $\mathbb{R}$ ha una dimensione completamente diversa.

Considerando i 4 vettori di $\mathbb{C}^2$ $(1,0)$ $(0,1)$, $(i,0)$, $(0,i)$, non è difficile vedere che questi formano una base di $\mathbb{C}^2$ su $\mathbb{R}$, nel senso che ogni coppia $(a+ib,\ a'+ib')$ si può scrivere in modo unico come combinazione lineare di questi 4 vettori.
Precisamente:
$a(1,0) + a'(0,1) + b(i,0) + b'(0,i)$ e i vettori $(i,0)$ e $(0,i)$ sono ineliminabili dalla base.

Siccome accetto solo moltiplicazioni con numeri reali, non posso moltiplicare per numeri complessi, allora questi due elementi sono ineliminabili dalla base.
Li devo proprio mettere se voglio ottenere le cose che hanno un i da qualche parte.

Dunque $\mathbb{C}^2$ sopra $\mathbb{R}$ ha dimensione 4 (canonica).

Se V ha dimensione n sui complessi allora ha dimensione $2n$ sui reali.

E se ho una base formata da certi vettori, devo anche aggiungere i vettori $iv_1, iv_2, \ldots, iv_n$.
E la base diventa formata dal doppio di vettori della base dello spazio vettoriale di partenza

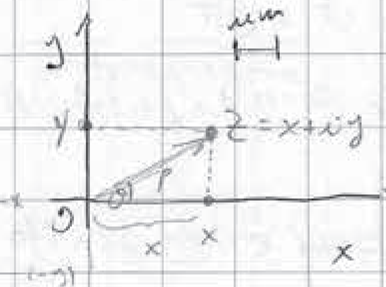
Domande: 1. Come si trova l'inverso di un complesso $z \neq 0$?
2. Quanto vale il prodotto di un numero complesso per il suo coniugato? Reciproco
3. Quali numeri complessi sono invertibili?
4. Esiste uno spazio vettoriale complesso di dimensione 5? Sì, $\mathbb{C}^5$, ma non su $\mathbb{R}$

30.10

Lez. 31: I NUMERI COMPLESSI II

- La forma trigonometrica di un numero complesso
- Radici n-esime di numeri complessi
- Calcolo pratico di radici n-esime
- Polinomi reali e complessi e loro radici e teorema fondamentale dell'algebra

LE COORDINATE CARTESIANE - IL PIANO DI ARGAND-GAUSS



Questo ci serve per introdurre il cosiddetto piano di Argand-Gauss, il piano complesso per visualizzare lo spazio dei numeri complessi. Il piano di Argand-Gauss è il piano in cui si rappresentano graficamente i numeri complessi.

z è un numero complesso
$z = x + iy$

Il punto z può essere unito all'origine con un vettore, il vettore OZ
Sia ρ (RO) la lunghezza, o modulo del vettore OZ.
Se z è il numero complesso 0, il punto coincide con O e il suo modulo è zero, cioè la sua lunghezza è zero.
Diamo un nome, θ (TETA), all'angolo che l'asse x forma con il vettore
θ varia da 0 a 2π, un giro completo. Ma potrebbe variare anche da $-\infty$ a $+\infty$, un angolo diverso. L'importante è riuscire ad ottenere tutti i numeri complessi. Anche ρ è variabile, varia da 0 a $+\infty$ indipendentemente.
Con queste notazioni abbiamo

$x = \rho \cos\theta$

$y = \rho \sin\theta$

Ed il numero complesso z può essere riscritto nella forma

$z = x + iy = \rho\cos\vartheta + i\rho\sin\vartheta = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$

che è la forma trigonometrica del numero complesso z in cui vengono messi in evidenza ρ, che è il modulo e l'angolo ϑ che chiamiamo argomento.

ρ = modulo
ϑ = argomento $\quad 0 < \vartheta < 2\pi \quad$ o $-\infty < \vartheta < \infty$

Si noti che uno stesso numero complesso z potrà essere rappresentato con valori diversi di ϑ, ad es. $\vartheta' = \vartheta + \underset{}{2\pi}^{\cdot 2,3,n}$

A ϑ diversi può quindi corrispondere lo stesso z (numero complesso), purché sia fissato il modulo ρ.

Dunque un numero complesso può essere scritto anche in forma trigonometrica, mettendo in rilievo ρ e ϑ.

Se ϑ è compreso tra 0 e 2π l'argomento sarà detto argomento principale.

Dalla forma trigonometrica possiamo dedurre che

$$x^2 + y^2 = \rho^2(\cos^2\vartheta + \sen^2\vartheta) = \rho^2$$

$$\Rightarrow \rho = \sqrt{x^2+y^2}$$ cioè ρ è il modulo del numero complesso anche essendo $\sqrt{x^2+y^2}$

e abbiamo

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} = \tan\vartheta$$ è l'arco la cui tangente è $\frac{y}{x}$

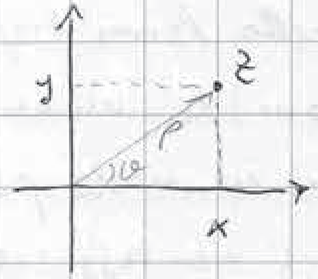
$$\Rightarrow \vartheta = \arctan\frac{y}{x}$$

Dunque abbiamo

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho \operatorname{sen}\vartheta \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\vartheta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \operatorname{sen}\vartheta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

$$x + iy = \rho\,(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)$$

I passaggi dalla forma algebrica alla trigonometrica e viceversa.



z come punto del piano

$z = x + iy$

per passare alla forma trigonometrica devo scoprire il valore di ρ e ϑ.

L'esattezza del calcolo potrà essere fatta solo in alcuni casi notevoli, in altri casi si useranno delle tavole, se si vuol trovare ϑ in modo approssimato.

I numeri reali positivi hanno $\vartheta = 0$, i numeri reali negativi hanno $\vartheta = \pi$

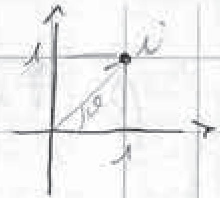
$z = 1 = 1\cdot(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sia } z = 1 \ (z = 1 + 0i) \Rightarrow \rho = 1,\ \vartheta = 0 \\ \text{se } z = -1 \Rightarrow \rho = 1,\ \vartheta_{-1} = \pi \end{array}\right\} \text{numeri reali}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{se } z = i \Rightarrow \rho = 1,\ \vartheta_i = \dfrac{\pi}{2} \\ \text{se } z = -i \Rightarrow \rho = 1,\ \vartheta_{-i} = \dfrac{3}{2}\pi \end{array}\right\} \text{numeri complessi puri}$$

$z = i = 1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$

Se $z = 1 + i$



$\vartheta = \frac{\pi}{4}$

$\rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

e z in forma trigonometrica è $z = \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right)$

Se $z = 7 + 3i$, ϑ non ha un valore facile da determinare

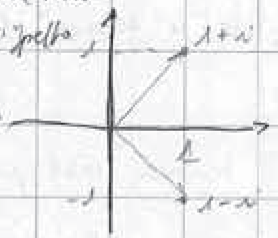
I VANTAGGI DELLA FORMA TRIGONOMETRICA

I vantaggi della forma trigonometrica si hanno nella moltiplicazione dei numeri complessi, perché gli angoli ϑ si comportano in modo particolarmente semplice.
Tale forma è vantaggiosa nelle operazioni di moltiplicazione.
Ad es.

$$z_1 = 1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right)$$

$$z_2 = 1 - i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4}\right)$$

è il simmetrico di z_1 rispetto all'asse orizzontale



$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{4}\right)$ $\cos 2\pi$

$$z_1 z_2 = 2 \left(\boxed{\cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{7\pi}{4} - \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4}} + i \boxed{\left(\cos \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{7\pi}{4}\right)}\right) =$$

$\rho_1 \cdot \rho_2$ moltiplicazione dei moduli

$$2 \left(\underbrace{\cos 2\pi}_{1} + i \underbrace{\operatorname{sen} 2\pi}_{0}\right) = 2$$

Quindi se abbiamo due numeri complessi, con i loro argomenti e moduli

z_1 ϑ_1 ρ_1

z_2 ϑ_2 ρ_2

$$z_1 \cdot z_2 : \underbrace{\rho_1 \cdot \rho_2}_{\text{moduli}} \quad \underbrace{\vartheta_1 + \vartheta_2}_{\text{argomenti}}$$

z_1^2 : ρ_1^2 $2\vartheta_1$
z_1^3 : ρ_1^3 $3\vartheta_1$
ecc.

Quindi questo rende molto facile il calcolo delle radici n-esime.

Se ho un numero complesso z e n un numero positivo cosa si intende con $\sqrt[n]{z}$? Significa che esiste w è un numero complesso tale che $w^n = z$

$$\sqrt[n]{z} = w \Rightarrow w^n = z$$

Per calcolare le radici n-esime si usa la forma trigonometrica

Se z ha modulo ρ e argomento ϑ
e w ha modulo σ e argomento φ, allora avremo:

$$\boxed{\sigma^n = \rho \quad e \quad n \cdot \varphi = \vartheta + 2k\pi}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sigma = \sqrt[n]{\rho}}_{\text{numero reale}} \quad e \quad \varphi = \frac{\vartheta + 2k\pi}{n}$$ per $k = 0, 1, \dots, n-1$ troviamo le possibili radici

Quindi le radici n-esime di un numero complesso $z \neq 0$ qualsiasi sono esattamente n e sono date dalla formula sopra.

Radice n-esime di un numero complesso

$z : w^n = z \qquad \sqrt[n]{z} = w \Rightarrow w^n = z$

$$\begin{cases} \sigma = \sqrt[n]{\rho} \\ \varphi = \dfrac{\vartheta + 2k\pi}{n} \end{cases} \qquad \rho \neq 0$$

dove $\sqrt[n]{\rho}$ indica la radice n-esima aritmetica di ρ e k è un intero compreso tra 0 e $n-1$.

Ad es. il numero 1
Nel campo reale tutte le radici n-esime di 1 sono 1.
Nel campo complesso non è così.
Nel campo complesso $\sqrt[n]{1}$ ha come risultato n numeri complessi.
Ad esempio se $n=3 \Rightarrow \sqrt[3]{1}$.
Nel campo complesso 1, in forma trigonometrica, è:

$$1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$$

Formula di risoluzione di $\sqrt[3]{1}$

$$\frac{0 + 2k\pi}{3} \quad k = 0, 1, 2 \quad \text{per } k=0: 0 \quad 1: \frac{2\pi}{3} \quad 2: \frac{4\pi}{3}$$

$\sqrt[3]{1} = 1 = \rho \quad \varphi =$ Le 3 soluzioni di $\sqrt[3]{1}$:

$\cos 0 + i \sin 0$

$\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$

$\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}$

Per esercizio scrivere le forme algebriche dei 3 numeri complessi radici terze di 1, complesso.

32'40" Esempio: $\sqrt{i}$, darà come risultato 2 numeri complessi il cui quadrato è i

Forma trigonometrica

$$\boxed{i = \cos\underbrace{\frac{\pi}{2}}_{\text{argomento}} + i \,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}}$$

$\rho = 1$ (modulo di i)

Il modulo delle radici quadrate di i è 1.

L'argomento è $\dfrac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}$ per $k=0$ e 1 → 2 soluzioni

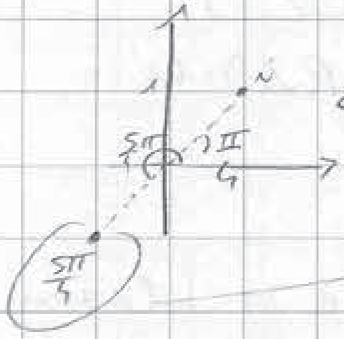
$k=0$, $k=1$

$\frac{\pi}{4}$ $\quad$ $\frac{5\pi}{4}$

Quindi le due radici quadrate di i sono:

$$\sqrt{i} < \begin{array}{l} \boxed{\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(1+i)} \\ \boxed{\cos\frac{5\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{4}} = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)} \end{array}$$

forma algebrica delle 1e radici quadrate di i



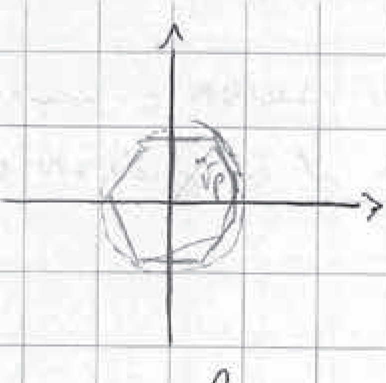
per la forma algebrica di questa seconda radice ci conviene col piano Argand-Gauss

In generale, cercando le radici n-esime di un numero complesso z: 35'40"

$\sqrt[n]{z}$ $\quad z\neq 0$ distinte, saranno n numeri complessi

se $z=0$ unica soluzione 0, che nessun interesse.

Come si distribuiscono queste radici nel piano di Argand-Gauss?



$\sqrt[n]{z}$

Ci muoviamo, per le radici n-esime di z su una circonferenza di raggio $\sqrt[n]{\rho}$, con ρ = modulo di z, formando un poligono con n lati, regolare, inscritto in quella circonferenza.

Se $n=2$ si tratta di un poligono degenere, con due punti diametralmente opposti.
Per $n>2$, con $n=3$ abbiamo un triangolo, $n=4$ abbiamo un quadrato, $n=5$ un pentagono ecc.

TUTTI I NUMERI COMPLESSI DIVERSI DA 0 HANNO n RADICI
n-esime

Cioè l'equazione $x^n = z$ ha n soluzioni, in campo complesso.

Prendendo l'equazione

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

numero complesso qualsiasi

Il teorema fondamentale dell'algebra dice che tale equazione ha sempre n radici
Per la precisione il teorema fondamentale dell'algebra dice che tale equazione ha 1 radice, ma come conseguenza

molto semplice di questo fatto, si può dimostrare che se ce n'è una ce ne sono n, con qualche precisazione importante.

Se prendo il polinomio $(x-i)^3=0$ apparentemente questo polinomio ha una sola radice, ha la radice $x=i$. Però le radici devono essere contate con la loro molteplicità.

Vediamo cosa si intende per molteplicità:

se ho il polinomio $p(x)$ del quale sto discutendo le radici e il numero z è una sua radice, allora il polinomio $p(x)$ si può dividere per $x-z$

$$p(x) = (x-z)\ Q(x)$$

Può capitare che $Q(x)$ sia di nuovo divisibile per $x-z$ allora avremo

$$p(x) = (x-z)^2 \cdot Q_1(x)$$ e lo stesso discorso se

Q_1 è divisibile per $x-z$ ecc. Allora si può scrivere

$$\underset{\text{(impossibile } m+1\text{)}}{p(x) = (x-z)^m}\ \bar{Q}(x) \Big\}\ \text{molteplicità}$$

Il polinomio $(x-i)^3$ ha la radice $x=i$ multipla di molteplicità 3.

Se contiamo la molteplicità delle radici, queste sono n.

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

Sia $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio di grado $n > 0$.
(a coefficienti complessi)

Allora $p(x)$ è un prodotto di polinomi complessi di primo grado.

In particolare $p(x)$ ha sempre almeno una radice in $\mathbb{C}$, una radice complessa, non reale.

Le radici vanno anche considerate con la dovuta molteplicità, nel senso che il polinomio $(x-v)^3$ ad es. ha solo la radice $x = v$, ma questa radice è tripla, cioè bisogna tenere conto della molteplicità di una radice.

Non si può solo dire quali sono le radici, ma occorre dire anche la loro molteplicità.

Una conseguenza del teorema è che se due polinomi complessi hanno esattamente gli stessi valori per ogni valore della variabile x allora automaticamente hanno gli stessi coefficienti. Questo è il principio di identità.

Domande: 1. relazione tra argomento di un complesso z e il coniugato?
2. quante radici n-esime ha un numero complesso $\neq 0$?
3. quante radici quarte reali ha un numero reale $r < 0$?

31.10

Lez. 32 Autovalori ed Autovettori di un endomorfismo

cioè di una applicazione lineare di uno spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ in sé stesso.

- Il concetto di autovalore ed autovettore
- Ricerca degli autovettori e polinomio caratteristico
- Calcolo pratico degli autovettori

Prendiamo ad esempio una applicazione lineare di $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = (x+y, -y)$$

(una applicazione di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^2$)

Questa applicazione lineare è associata ad una matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Il problema che ci poniamo è il seguente: esiste qualche vettore $v = (x,y)$, una qualche coppia di $\mathbb{R}^2$ che gode di questa proprietà? Cioè

$$f(x,y) = \underset{\lambda \text{ reale}}{\lambda} (x,y),$$

cioè esiste una qualche coppia (x,y) che trasformata mediante f dà come risultato la coppia stessa moltiplicata per un numero $\lambda \in \mathbb{R}$.

La risposta è sì perché se prendiamo $v = (0,0)$, f trasforma lo 0 nello 0, cioè $f(0,0) = \lambda(0,0)$ $\forall \lambda$.
Ma se vogliamo che la nostra domanda abbia senso dobbiamo chiederci se esiste qualche

$v = (x, y) \neq (0,0)$ che mediante f si trasformi in un suo multiplo.

Per scoprire se esiste una simile coppia x, y in pratica occorre che si abbia:

$$\begin{cases} x+y = \lambda x & 1^a \text{ componente} \\ -y = \lambda y \end{cases}$$

e portando tutto al primo membro, le equazioni diventano

$$\begin{cases} (1-\lambda)x + y = 0 \\ (-1-\lambda)y = 0 \end{cases}$$

E chiediamo che, oltre alla coppia $(0,0)$ che è soluzione di questo sistema di equazioni, ci siano anche delle coppie non nulle.

Abbiamo un sistema di due equazioni, in due incognite, omogeneo (termine noto $= \emptyset$).
Quindi ammette soluzioni diverse dalla soluzione ~~nulla~~ $(0,0)$ soltanto se c'è una incognita libera. Condizione legata al teorema di Rouché-Capelli.

Per porre la condizione che ci sia una soluzione diversa dalla soluzione nulla, definisco la matrice A_λ come la matrice del sistema, che dipende dal parametro λ. Il rango deve essere inferiore al massimo, cioè.

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

Da notare che $A - \lambda I = A_\lambda$

$$\lambda I = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Una matrice quadrata 2x2 ha rango minore del massimo quando il suo determinante vale ϕ, ovvero

$$|A - \lambda I| = 0$$

Allora il nostro problema è annullare il determinante

$(1-\lambda)(-1-\lambda) = 0$ e questa è l'equazione che mi dice per quali numeri reali λ è possibile trovare una coppia $(x, y) \neq (0,0)$ che mediante f si trasforma in un proprio multiplo secondo λ.

I numeri λ sono due:

$\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$

Ci sono allora due numeri reali che godono di questa proprietà.

Per trovare le coppie (x, y) che soddisfano questa condizione, allora le coppie (x, y) relative al numero λ_1 si ottengono risolvendo queste equazioni con

λ sostituendo da $\lambda_1 = 1$. Cioè:

$\boxed{y=0}$ e l'altra equazione non c'è

Per $\lambda_2 = -1$ ho $\boxed{2x+y=0}$ e l'altra eq non c'è, $0=0$

Le soluzioni del problema sono:
se $\lambda_1 = 1$ sono tutte le coppie tali che $y = 0$, in particolare la coppia $(0,0)$, ma sono tutte le coppie nella forma $(x,0)$.
Se $\lambda_2 = -1$ otteniamo tutte le coppie tali che $y = -2x$, quindi x arbitrario e secondo elemento $-2x$. Gli autovalori sono λ_1 e λ_2; gli autovettori sono $(x,0)$ e $(x,-2x)$.
I numeri $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$ si chiamano autovalori dell'endomorfismo f, e sono 2.

Essi sono le soluzioni di una certa equazione che abbiamo scritto:

$$|A - \lambda I| = 0$$

I vettori, cioè le coppie (x,y) tali che $f(x,y) = \lambda(x,y)$ sono le soluzioni di questo sistema dove al posto di λ si mette una volta λ_1 e una volta λ_2

Questo è un esempio di endomorfismo con 2 autovalori e due corrispondenti autovettori. Non sempre è così.

Allora modificando qualcosa, prendendo l'endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ la cui matrice è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ovvero } f(x,y) = (x+y, -x+y)$$

Usando lo stesso metodo, abbiamo $|A - \lambda I| = 0$,

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \quad \text{e il determinante è:}$$

$(1-\lambda)^2 + 1 = 0$ che non ha soluzioni nel campo reale, ma ce l'ha nel campo complesso, quindi se fosse $f: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$

le radici dell'equazione sono, in campo reale

$$1 - \lambda = \pm i \quad \text{e quindi}$$

$\lambda_1 = 1 - i$
$\lambda_2 = 1 + i$

Quindi nel campo complesso questo ha due autovalori e gli autovettori si trovano in funzione di essi.

Quindi può capitare che λ non sia un numero reale, ma un numero complesso.

In genere il campo è $\mathbb{R}$. 13'40''
La definizione generale occupandoci di $\mathbb{R}$ è come segue:

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (applicazioni lineari di $\mathbb{R}^n$ in sé stesso, o endomorfismi in $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 1$ qualsiasi)

λ è un autovalore di f se esiste un vettore non nullo v tale che si abbia: $f(v) = \lambda v$.

Ogni v tale che $f(v) = \lambda v$ si dice autovettore di f relativo a λ.

L'insieme degli autovettori (compreso il vettore nullo) formano un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$, chiamato col simbolo $V_\lambda \subseteq \mathbb{R}^n$, definito come autospazio. Perché V_λ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e questa è una proprietà fondamentale da ricordare.

Determinare gli autovalori, e di conseguenza gli autovettori di un endomorfismo, di una applicazione lineare, consiste che il sistema

$(A - \lambda I)X = 0$ nelle incognite x abbia soluzioni non nulle.

Questo sistema è ricavato dal seguente ragionamento:
$v = x_1, \dots, x_n$ un vettore v è una n-upla; se scriviamo la n-upla come colonna, se A è la matrice associata alla applicazione lineare, per trovare il vettore di $\mathbb{R}^n$ immagine del vettore colonna $x_1, \dots, x_n$ facciamo il prodotto AX.

Il risultato che vogliamo trovare è il vettore λ volte x:

$$AX = \lambda X$$, a questo punto, sapendo che moltiplicare per la matrice identica non cambia niente, lascia tutto invariato, allora possiamo scrivere, aggiungendo la matrice identica

$$AX = \lambda I X$$ e l'eguaglianza diventa

$$AX - (\lambda I)X = 0$$ e, raccogliendo X

$$(A - \lambda I) X = 0$$ e vogliamo che questo sistema lineare nelle incognite x abbia soluzioni non nulle.

Un sistema lineare omogeneo ha soluzioni non nulle quando il rango della matrice dei termini noti è minore di n ~~del rango massimo~~, ovvero ci sono incognite libere, il che vuol dire che il determinante è 0.

$$|A - \lambda I| = 0$$ In generale:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

↳ sulla diagonale abbiamo un $-\lambda$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Se sviluppiamo il determinante della matrice allora si può facilmente vedere che lo sviluppo è un polinomio nell'incognita λ fatto in questo modo:

$$P(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + \underbrace{\dots}_{\text{termini di grado inferiore}}$$

È un polinomio in λ di grado esattamente n, con il coefficiente di grado n di valore ± 1.

In questo polinomio c'è sicuramente λ^n. Questo si chiama il polinomio caratteristico della matrice, o dell'endomorfismo o dell'applicazione lineare.

Per trovare gli autovalori si cercano le radici del polinomio caratteristico $P(\lambda) = 0$, che nel caso di $\mathbb{R}^n$, ha grado n, e coefficienti reali.

In campo reale si potrebbero non avere radici, o averne meno di n.
Nel campo complesso si hanno invece n radici, ognuna contata con la dovuta molteplicità.
Le radici sono $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, ma può capitare che alcune siano la stessa radice.
Ad es. radici multiple come nel caso di $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^3 (\lambda - \lambda_2)^5 \dots$

Per determinare gli autovalori di una applicazione lineare $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ per prima cosa dobbiamo cercare il polinomio caratteristico, calcolarne il determinante e annullarlo. Si tratta di una equazione di grado n in λ.

Esempi di calcolo di autovalori e relativi autovettori.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

che è la matrice dell'endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$)

$$f(x, y, z) = (z, 0, 3z)$$

Per cercare gli autovalori di questa matrice devo considerare la matrice $A - \lambda I$

Il polinomio caratteristico

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

per calcolare il polinomio caratteristico si risolve il determinante

$$|A - \lambda I| =^{*} \lambda^2 \cdot (3 - \lambda) \boxed{= 0}$$

* osserviamo che questa matrice ha tutti elementi nulli sotto la diagonale principale (idem se fossero sopra), allora la matrice si chiama triangolare inferiore o superiore e il determinante è il prodotto degli elementi della diagonale.

Le soluzioni sono:

$\lambda_1 = 3$ semplice

$\lambda_2 = 0$ questa è una radice doppia ($\lambda^2 = (\lambda - 0)\cdot(\lambda - 0)$) o di molteplicità $m_2 = 2$

Quindi l'endomorfismo f, o la matrice A, ammette 3 autovalori (lo 0 è una doppia radice) reali, non distinti.

Gli autovettori si trovano ragionando separatamente sui due autovalori, $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 0$.

Ognuno di essi dovrà essere trattato per conto suo.

per $\lambda_1 = 3$ dobbiamo scrivere il sistema lineare corrispondente alla matrice $A - \lambda I$ dove al posto di λ c'è 3.

E il sistema lineare è:

$$\begin{cases} -3x + z = 0 \\ -3y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} \text{ per } \lambda = 3$$

Le equazioni devono essere 2 perché ho scelto λ affinché vi siano soluzioni non nulle ⇒ le 3 equazioni devono essere meno di 3 indipendenti, sono al più 2.

Le soluzioni si ottengono mettendo
$y = 0$ e $z = 3x$. La soluzione più generale è formata dai vettori della forma:
$(x, 0, 3x)$
La x è l'incognita libera.

Una base dell'autospazio di λ_1, un sottospazio vettoriale, è formata dal vettore $(1, 0, 3)$ per $x=1$. $\underbrace{V_{\lambda_1}\,(1, 0, 3)}_{28'}$ l'autospazio V_{λ_1} ha come base formata dal vettore $(1,0,3)$

È uno spazio vettoriale di dimensione 1.

Per l'autovalore $\lambda_2 = 0$ si ripete l'operazione vista prima.
Abbiamo:
$z = 0$
$0 = 0$
$3z = 0$ e le equazioni distinte sono 1; x e y sono incognite libere e $z = 0$

La soluzione generale è

$(x, y, 0)$

Allora, una base dello spazio vettoriale V_{λ_2} è formata da 2 vettori, tanti quante sono le incognite libere. Mettendo $x = 1$ e $y = 0$ prima e $x=0$, $y=1$ dopo, abbiamo:

V_{λ_2} $(1, 0, 0)$
$(0, 1, 0)$ che è una base formata da due vettori linearmente indipendenti.

V_{λ_2} è un sottospazio di dimensione 2, equivalente alla molteplicità $m_2 = 2$, non sempre questo avviene

32:10

Esempio (molteplicità ≠ dimensione autospazio)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

corrispondente alla $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$f(x, y, z) = (2z, 0, 0)$$

Il polinomio caratteristico

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = -\lambda^3 \Rightarrow \lambda_1 = 0$$

$m_1 = 3$ molteplicità

$$P(\lambda) = -\lambda^3$$

Gli autovettori relativi a quest'autovalore sono come segue: le equazioni corrispondenti per $\lambda = 0$ sono:

↳ ritrovo la matrice A e il sistema da studiare è $AX = 0$, in altre parole, se $\lambda = 0$ è un autovalore, gli autovettori corrispondenti, formano l'autospazio relativo a quell'autovalore, ma sono i vettori del nucleo dell'applicazione lineare, quello definito $\ker g$) Questo vale in generale, se $\lambda = 0$

$2z = 0$
$0 = 0$
$0 = 0$ e quest'eq. ha come soluzione

$(x, y, 0)$
↳ ↳ libere

Una base dell'autospazio è:

$(1, 0, 0)$
e $(0, 1, 0)$

l'autospazio è $\ker f$ e ha dimensione 2, mentre $\lambda_1 = 0$ ha molteplicità 3.

N.B.: se λ è un autovalore, V_λ non può avere dimensione 0, cioè sia costituito dal solo 0 di $\mathbb{R}^n$ $V_\lambda = \{0\}$

32.11

Questo perché per definizione un autovalore è
un numero λ tale che esistono dei vettori non nulli
tali che $f(v) = \lambda v$.
Per definizione il suo autospazio non è ridotto al
solo 0. Sennò non parliamo nemmeno di autovalore,
di autovettori e di autospazio.

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

In questa matrice è molto semplice vedere quali sono gli
autovalori. Questo perché la matrice $A - \lambda I$, togliendo λ dalla diagonale, è:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

come la matrice A, anch'essa è una matrice diagonale.
Il suo determinante, che è il polinomio caratteristico
della matrice stessa è il prodotto degli elementi
della diagonale:

$$P(\lambda) = (3-\lambda)(5-\lambda)(-2-\lambda)$$

Le radici di questo polinomio caratteristico sono
esattamente 3, 5 e -2.

Quindi, se una matrice è diagonale, gli autovalori
sono gli elementi della diagonale stessa.

Se sulla diagonale ci sono elementi uguali fra loro, trovo autovalori doppi, tripli, quadrupli ecc.
In questo caso è semplice anche il calcolo dell'autovettore

Infatti per $\lambda = 3$ ho l'autovettore

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0-5 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 0=0 \\ 2y=0 \\ -5z=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x \text{ qualunque} \\ y=0 \\ z=0 \end{matrix}$$

sostituendo λ in $A-\lambda I$.

Quindi per trovare gli autovalori usiamo il polinomio caratteristico $p(\lambda)$ che si ottiene prendendo la matrice $A-\lambda I$, calcolandone il determinante e annullandolo $|A-\lambda I| = 0$.
Gli autovalori possono essere tutti reali, qualche volta qualcuno può essere non reale.
Non è detto che siano tutti distinti, possono anche essere coincidenti e avere molteplicità maggiore di 1
Per trovare i corrispondenti autospazi, la cui dimensione è sempre almeno 1, non può mai essere 0, bisogna risolvere il sistema $(A-\lambda I)x = 0$, mettendo al posto di λ successivamente gli autovalori, λ_1, λ_2 ecc quelli che abbiamo trovato
Risolviamo il sistema lineare omogeneo, troviamo delle soluzioni che formano un sottospazio vettoriale

Domande:

1. Ogni endomorfismo ammette almeno un autovalore? SI
2. Se λ è un autovalore per f, allora esistono autovettori non nulli? SI se $\lambda \neq 0$, 0 altrimenti sempre
3. Un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ può avere l'autovalore 0 triplo? SI

Lez. 33 LA DIAGONALIZZAZIONE DELLE MATRICI QUADRATE

Gli autospazi e la loro dimensione
Quando una matrice è diagonalizzabile
Come si diagonalizza una matrice

Esempio, con endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ ed al calcolo della dimensione degli autospazi, che non può essere inferiore a 1.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice quadrata di ordine 3 che rappresenta un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$.

Per trovare autovalori e autospazi occorre calcolare il determinante di $A - \lambda I$ e porlo 0

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda^3 = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \underbrace{m_1}_{\text{molteplicità di } \lambda_1} = 3$$

l'autovalore

L'autospazio corrispondente, unico, di questo endomorfismo, troviamo che le equazioni che danno luogo all'autospazio sono:

$$\begin{matrix} 2z = 0 \Rightarrow z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{matrix} \Rightarrow (x, y, 0)$$

Quindi l'autospazio $V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((1,0,0), (0,1,0))$

Abbiamo un autovalore di molteplicità 3 e un autospazio corrispondente di dimensione $d_1 = 2 < 3$.

Questo è un endomorfismo non semplice

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcolo di autovalori e autovettori:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\det A = -\lambda^3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \quad m_1 = 3$

L'autospazio corrispondente:

$\begin{cases} 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ le soluzioni sono della forma $(x, 0, 0)$

Una base di V_{λ_1} $(1,0,0)$ $\Rightarrow \dim V_{\lambda_1} = d_1 = \underline{1}$ (il minimo possibile)

Osserviamo che per calcolare la dimensione dell'autospazio, posso fare come fatto finora.

Può essere più semplice ragionare in modo diverso.

Cercare l'autospazio significa cercare le soluzioni del sistema omogeneo $(A - \lambda I)x = 0$.

Cioè cercare il nucleo della applicazione lineare associata non alla matrice A ma alla matrice $A - \lambda I$, che è una nuova applicazione lineare, che potremmo chiamare $\bar{f}\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Ad essere precisi l'applicazione lineare sarebbe

$$f - \lambda\, id_{\mathbb{R}^n} \quad \text{che, nel caso di } \mathbb{R}^3 \text{ è}$$

$f(x, y, z) - \lambda(x, y, z)$

Abbiamo a che fare con il nucleo di una applicazione lineare, associata alla matrice $A - \lambda I$.

Calcolare la dimensione del nucleo senza fare i calcoli parte dalla conoscenza di

$$\dim \ker f = \underset{\mathbb{R}^n}{n} - \underbrace{\rho(A - \lambda I)}_{\text{dimensione immagine}}$$

ORDINE matrice

Se voglio la dimensione del nucleo, che è l'autospazio, basta che calcoli $n - \underbrace{\rho(A - \lambda I)}_{2}$. (una riga nulla e 2 l.i.

Nel nostro caso $\underbrace{n = 3}_{\hookrightarrow \mathbb{R}^3} - 2 = 1$.

Ritornando all'esempio precedente, con questo tipo di ragionamento, abbiamo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ matrice ridotta per righe con una sola riga non nulla

$\lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \dim V_{\lambda_1} = 3 - 1 = 2$

In termini generali possiamo dire che

$$\boxed{n - \rho(A - \lambda I) = \dim V_\lambda}$$

n = ORDINE DELLA MATRICE A

formula per calcolare la dimensione dell'autospazio. 11:25

Da usare quando si vuole sapere SOLO LA DIMENSIONE DELL'AUTOSPAZIO

La dimensione dell'autospazio varia da 1 al numero di autovalori. Non può essere 0.
Non può essere superiore alla molteplicità dell'autovalore come radice del polinomio caratteristico.
La dimensione dell'autospazio è minore o uguale della molteplicità e maggiore di 0.

TEOREMA: Se λ è un autovalore di molteplicità m e V_λ è l'autospazio associato allora

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{minimo assoluto}}}{1} \leq \dim V_\lambda \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{massimo assoluto}}}{m}$$

~~[illegible]~~

DIAGONALIZZAZIONE

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Una matrice è diagonalizzabile se è possibile trasformarla con una certa operazione standard in una matrice diagonale.

Una matrice diagonale D è una matrice del tipo:

$$D = \underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot \end{pmatrix}}_{\text{diagonale}}$$

sulla diagonale ci sono elementi qualsiasi, altrove ci sono tutti 0.
Ad esempio $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Diagonalizzare vuol dire compiere sulla matrice una certa operazione che la cambia e la fa diventare, in un certo modo standard, una matrice diagonale. Non tutte le matrici sono diagonalizzabili. Devono avere delle proprietà.

Consideriamo l'endomorfismo $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e la matrice associata A.

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad A$$

L'endomorfismo ha un numero r di autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ dove ognuno ha una molteplicità $m_1, \dots, m_r$: $m_1, \dots, m_r$ come radici del polinomio caratteristico $P(\lambda)$: $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots$

Può capitare che il polinomio caratteristico non abbia radici reali. Oppure che abbia alcune radici reali e altre complesse. Oppure che tutte le sue radici siano reali.

Quindi, in un caso $\lambda_1 \dots \lambda_r$ sono tutti reali, questa è l'ipotesi dalla quale partiamo.

Quadrilospazio $V_{\lambda_1} \dots V_{\lambda_r}$ ha una dimensione $d_1, \dots, d_r$: $d_1 \dots d_r$ che non supera la molteplicità $m_1 \dots m_r$ che è almeno 1

La dimensione può anche essere diversa dalla molteplicità. Nel caso in cui $d_1 = m_1 \dots d_r = m_r$, ovvero tutti gli autospazi hanno la dimensione massima possibile secondo il teorema visto, e si verificano tutte le altre condizioni diciamo che f è un endomorfismo semplice.

* Sostituendo λ_1

Endomorfismo semplice f, se:

$\rightarrow \lambda_1 \dots \lambda_2$ reali (autovalori)

$m_1 \dots m_2$

$V_{\lambda_1} \dots V_{\lambda_2}$

$d_1 \dots d_2$

$\rightarrow d_1 = m_1 \dots d_2 = m_2$

condizione affinché f sia un endomorfismo semplice. Allora la matrice A associata è diagonalizzabile

Se f è un endomorfismo semplice, la matrice A associata è diagonalizzabile.

Ad esempio:

$f(x, y) = (x+y, -y)$ la cui matrice associata è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$ e il polinomio caratteristico

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$ per trovare gli autovalori

f è un endomorfismo semplice:

gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$ e sono $2 \in \mathbb{R}^2$.

La dimensione degli autospazi si ottiene calcolando il rango delle loro matrici solo, e non facendo tutto il calcolo, dal momento che occorre solo saperne il valore.

per $\lambda_1 = 1$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ di rango $\underline{1}$ = molteplicità di λ_1, quindi la dimensione di $V_{\lambda_1} = 2 - 1 = 1$

per $\lambda_2 = -1$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ di rango $\underline{1}$ = molteplicità di λ_2, quindi la dimensione di $V_{\lambda_2} = 2 - 1 = 1$

$(\dim V_{\lambda_1} = 1) = (m_1 = 1)$ $\quad (\dim V_{\lambda_2} = 1) = (m_2 = 1)$

Questo è un endomorfismo semplice. 22'25"

Notiamo in generale che se un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ ha $\lambda_1 \dots \lambda_n$ autovalori reali tutti distinti, cioè ognuno con molteplicità 1, nessuno con molteplicità > 1, gli autospazi corrispondenti V_{λ_1} ecc hanno tutti dimensione 1, visto che la dimensione non può superare 1 ed essere 0.

Gli autospazi hanno la dimensione giusta, pari al massimo possibile se gli autovalori sono reali e distinti. La dimensione è 1.

Tutti gli endomorfismi di questo tipo sono semplici.

Gli endomorfismi non semplici sono quelli che hanno dimensione diversa dalla molteplicità.

ENDOMORFISMI E DIAGONALIZZAZIONE

Una matrice A è diagonalizzabile se può essere trasformata in una matrice diagonale. Perchè la trasformazione avvenga, supponiamo di avere una matrice quadrata di ordine n, come la matrice A, definita P, che gode delle seguenti proprietà: P è una matrice invertibile, quindi ammette l'inversa P^{-1}. Allora posso calcolare il prodotto $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$, ovvero il risultato del prodotto è una

nuova matrice D. Essa sarà una matrice quadrata di ordine n, che si dice "simile" alla matrice A.
Se ~~otteng~~ riesco a scoprire una matrice invertibile P tale che $P^{-1} A P$ sia diagonale allora dico che A è una matrice diagonalizzabile

$$P^{-1} A P = D \text{ diagonale} \Rightarrow A \text{ è diagonalizzabile.}$$

Se A è già una matrice diagonale, tipo $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ allora $P = I$, abbiamo

$$I^{-1} A I = A$$

quindi A è diagonalizzabile, cioè le matrici diagonali sono diagonalizzabili.

La matrice relativa all'endomorfismo $f(x,y) = (x+y, -y)$ che è un ~~dis~~ endomorfismo semplice, è diagonalizzabile.
Dimostrazione come segue:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Gli autovettori relativi agli autovalori della matrice A si calcolano dagli autovalori $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$, risolvendo le due equazioni ottenute per sostituzione di λ_1 e λ_2:

$\lambda_1 = 1 \qquad y = 0 \qquad (1, 0) \rightarrow$ un autovettore

$\lambda_2 = -1 \qquad 2x + y = 0 \Rightarrow y = -2x \quad (1, -2) \rightarrow$ un autovettore

Utilizzando questi due autovettori possiamo metterli sulla matrice P come colonne.

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, che è invertibile perché il determinante vale $-2 \neq 0$

$\det P = -2 \neq 0 \Rightarrow P$ è invertibile.

$$P^{-1} = \frac{1}{\underset{\det P}{-2}} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

scritta usando i complementi algebrici degli elementi della matrice P.

Una volta calcolato P^{-1}, calcoliamo $P^{-1}A$:

$$P^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$ e moltiplichiamo per P

$$\boxed{P^{-1}A}\, P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = D$$ diagonale

e si nota che i due autovalori sono sulla diagonale: $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$

La diagonalizzazione è legata al fatto che f è un endomorfismo semplice, dalla seguente proprietà:

Se $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è semplice, abbiamo gli autovalori

$\lambda_1 \dots \lambda_2$, molteplicità

$m_1 \dots m_2$ e ognuno di questi ha uno autospazio che ha dimensione pari alla molteplicità.

$V_{\lambda_1} \dots V_{\lambda_2}$ ogni autospazio ha una base

notare che $m_1 + m_2 = n$ (Tutti gli autovalori devono essere reali)

Mettendo insieme tutti i vettori delle basi, $v_1\ v_2 \dots v_n$ e mettendoli come colonne di una matrice. La matrice che ottengo è P:

$$P = \begin{pmatrix} \overset{v_1}{[\ ]} & \overset{v_2}{[\ ]} & \dots & \overset{v_n}{[\ ]} \end{pmatrix}$$

Prendo tutti gli elementi sì delle basi di questi autospazi e li metto sulle colonne

Si può dimostrare che tutti questi vettori sono linearmente indipendenti:
v_1 v_2 ... v_n sono linearmente indipendenti, essendo basi di autospazi diversi.

Se ho n vettori linearmente indipendenti e li metto come colonne di una matrice P, la matrice P ha rango massimo: $\rho(P) = n$, cioè $\det P \neq 0$ e dunque P è invertibile.
Se P è invertibile, posso scrivere lecitamente $P^{-1} A P$ ed è la matrice diagonale D, che ha sulla diagonale principale gli autovalori della matrice A e altrove tutti 0.

$$D = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

sulla diagonale gli autovalori della matrice A.

N.B. ogni generico λ_i con molteplicità ≥ 1, è ripetuto sulla diagonale tante volte quanto è la molteplicità delle radici del polinomio caratteristico.

Allora, se f è un endomorfismo semplice, cioè se gli autovalori sono tutti reali, la loro molteplicità è tale che la somma è n e se ogni autospazio ha la dimensione giusta ~~tale che la~~ pari alla molteplicità del corrispondente autovalore, allora la matrice A associata alla applicazione lineare f è una matrice diagonalizzabile, cioè esiste una matrice P invertibile tale che $P^{-1} A P = D$ diagonale.

P si ottiene semplicemente prendendo come colonne i vettori di una base di V_{λ_1}, seguiti dai vettori di una base di V_{λ_2} ecc fino ad esaurire tutti gli autovettori di tutte queste possibili basi.

Ogni autospazio ha una base, metto insieme tutte le basi e trovo i vettori che mi servono per avere le colonne della matrice P.

Sulla diagonale della matrice diagonalizzata D ottengo gli autovalori ripetuti ognuno con la dovuta molteplicità.

Però non tutti gli endomorfismi sono semplici e quindi non tutte le matrici sono diagonalizzabili.

La matrice 3×3 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ non è diagonalizzabile, perché ci sono troppo pochi autovettori. La matrice A ha uno autospazio associato all'unico autovalore che ha dimensione 2. Allora posso solo prendere due colonne della matrice P, ma la terza non si può determinare.

In alcuni, altri, esempi le cose sono diverse se ci muoviamo su $\mathbb{C}$ invece che su $\mathbb{R}$.

Riepilogando:

Autovalore: $\exists\, v \neq 0$ tale che $f(v) = \lambda v$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Autospazio $(A - \lambda I)x = 0$

calcolando le soluzioni del sistema

A diagonalizzabile:

$$D = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Domande:

1. Può un autospazio relativo ad un autovalore doppio avere una dimensione 1? NO, ci sono λ_1 e λ_2 anche se hanno stessi valori
2. Ci sono autospazi di dimensione 0? NO
3. La matrice identica con n righe ed n colonne è diagonalizzabile? SI.

N.B.!

TROVATI GLI AUTOVALORI $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots \lambda_n$

E GLI AUTOVETTORI V_{λ_1}, V_{λ_2}, V_3 ... V_{λ_n}

P È FORMATA DA TUTTI I VETTORI DELLA BASE, v_1 per V_{λ_1}, v_2 per V_{λ_2}, v_3 per V_{λ_3} ecc.

$$P = \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & & v_n \\ \multicolumn{4}{c}{\left(\begin{array}{cccc} \square & \square & \dots & \square \end{array} \right)} \end{array}$$

LA FORMA DIAGONALE D È:

$$D = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

con l'ordine $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ esatto.

Ovvero $D \neq \begin{pmatrix} \lambda_n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ per $\lambda_n \neq \lambda_2$